**UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
**Exame de Qualificação Análise no $\mathbb{R}^n$ - 2025.I**

Avaliadores: Bruno Santiago, Emília Alves e Luiz Viana

**Escolha 4 das 5 questões abaixo**

**Questão 1.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com entradas no corpo dos números reais. Prove que:*

*(a) o* ***grupo linear geral***

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); A \text{ é invertível}\}$$

*é um subconjunto aberto de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;*

*(b) o* ***grupo ortogonal***

$$O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}); A^{-1} = A^t\}$$

*é um subconjunto compacto de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

**Questão 2.** *Sejam $(X, d)$ um espaço métrico compacto, $T : X \to X$ uma isometria (isto é, $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$, para todo par $x, y \in X$) e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$ a função definida por*

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \varphi \circ T^\ell(x).$$

*Suponha que exista um subconjunto $D \subset X$, denso em $X$, e $c \in \mathbb{R}$, tais que*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = c, \ \ \forall\, x \in D.$$

*Prove que a sequência $\varphi_n$ converge uniformemente à função constante $\psi(x) = c, \forall\, x \in X$.*

**Questão 3.** *Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ difeomorfismos de classe $C^1$ tais que*

$$h \circ f = g \circ h.$$

*Sejam $x \in \mathbb{R}^d$ satisfazendo $f^k(x) = x$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $\hat{x} = h(x)$. Prove que as aplicações lineares*

$$Df^k(x), Dg^k(\hat{x}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

*possuem os mesmos autovalores.*

**Questão 4.** *Para cada uma das afirmativas abaixo, decida se é verdadeira ou falsa. Prove-a, caso seja verdadeira, ou apresente um contraexemplo, caso seja falsa.*

*(a) Toda função linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável.*
*(b) Toda função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Hölder-contínua é uniformemente contínua.*
*(c) Não existe uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que a aplicação $x \mapsto \nabla f(x)$ seja descontínua.*
*(d) Considere a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ e a estrutura métrica advinda dela. Então, não existe uma norma $\|\cdot\|_*$ em $\mathbb{R}^n$ tal que a função $f(x) = \|x\|_*$ é descontínua (na estrutura métrica proveniente da norma euclidiana).*

**Questão 5.** *Seja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ contínua e seja $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^d$ de classe $C^1$, onde $a < b$ são números reais, satisfazendo*

$$\gamma'(t) = f(\gamma(t)), \ \ \forall t \in (a, b).$$

*Suponha que para todo $K \subset \mathbb{R}^d$ compacto exista $t \in (a, b)$ tal que $\gamma(t) \notin K$. Prove que*

$$\sup\{\|f(x)\|; x \in \mathbb{R}^d\} = \infty.$$