PGMAT — UFF
Exame de Qualificação do Mestrado em Álgebra
04/04/2025

Nome:

Questões

1. (2pt) Seja S_n o grupo simétrico, formado pelas permutações de n elementos. Denotemos $o(\alpha)$ a ordem de um elemento $\alpha \in S_n$.
   (a) Mostre que se $\alpha, \beta \in S_n$ são ciclos disjuntos, então $o(\alpha\beta) = \text{mmc}\{o(\alpha), o(\beta)\}$.
   (b) Escreva a permutação abaixo como produto de ciclos disjuntos e calcule sua ordem.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 3 & 1 & 11 & 9 & 5 & 10 & 6 & 4 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (2pt) Prove que se A é um dominio de ideais principais, então todo ideal primo não nulo de A é maximal.

3. (2pt) Seja A um anel comutativo com unidade e M, N dois A-módulos. Seja $Hom_A(M, N)$ o conjunto formado pelos homomorfismos $M \to N$ de A-módulos.
   (a) Mostre que $Hom_A(M, N)$ é um A-módulo.
   (b) Suponha que M é livre sobre A, de posto r. Mostre que os A-módulos $Hom_A(M, N)$ e $N^{\oplus r}$ são isomorfos.

4. (2pt) Mostre que todo grupo abeliano finito é isomorfo ao produto direto de seus subgrupos de Sylow.

5. (2pt) Seja K um corpo. Siga os passos abaixo para mostrar que todo subgrupo finito do grupo multiplicativo $K^* = K - \{0\}$ é cíclico.
   (a) Seja $f(X) \in K[X]$ um polinômio com coeficientes em K e de grau $n \geq 0$. Então $f(X)$ possui no máximo n raízes em K.
   (b) Seja H um subgrupo não trivial de K^* de ordem p^r e $x \in H$ um elemento de ordem maximal $o(x) = s$. Mostre que todo elemento $g \in H$ é raiz do polinômio $X^s - 1$.
   (c) Conclua que $H \simeq \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$.
   (d) Seja G um subgrupo finito, de ordem n, do grupo multiplicativo $K^* = K - \{0\}$. Mostre que $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. (Dica: Exercício 4).