UFF - IME - Pós-graduação em Matemática

Exame de qualificação de mestrado 2024.2 - Análise no $\mathbb{R}^n$

Atenção: cada afirmação deve estar devidamente justificada.

Questão 1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)\mathrm{sen}(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine

a) se f é contínua;

b) se f é diferenciável.

Questão 2. Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, |y| \leq x, x^2+y^2 \leq 1\}$. Calcular

$$\iint_D xy \, dxdy.$$

Questão 3. Considere uma sequência de matrizes $A_n \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ satisfazendo as três propriedades

(1) $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$,

(2) para cada n, A_n é invertível,

(3) $A_n^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$.

a) Mostrar que A é invertível e que $A^{-1} = B$.

b) Ainda podemos concluir que A é invertível sem a propriedade (3)?

Questão 4. Considere a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi(x,y) = (\mathrm{sen}(y/2) - x, \, \mathrm{sen}(x/2) - y).$$

Mostrar que φ é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}^2$ e $\varphi(\mathbb{R}^2)$, e que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ é aberto.

Definição *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto (limitado ou não). Uma* **exaustão** *de U é uma sequência de compactos mensuráveis $K_i \subset U$ tal que $U = \cup K_i$ e $K_i \subset int.K_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Questão 5. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua não-negativa no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.

1. Existe uma constante $c > 0$ tal que $\int_K f(x)\, dx \leq c$ para todo compacto $K \subset U$.

2. Para toda exaustão $U = \cup K_i$, a sequência $\int_{K_i} f(x)\, dx$ converge quando $i \to \infty$.

Neste caso, mostre que para cada exaustão, o limite $\lim \int_{K_i} f(x) dx$ é igual ao supremum $\sup_{K \subset U} \int_K f(x) dx$.

UFF - IME - Pós-graduação em Matemática

Exame de qualificação de mestrado 2024.2 - Análise no $\mathbb{R}^n$ Gabarito

---

Questão 1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)\text{sen}(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine

a) se f é contínua;

b) se f é diferenciável.

Resolução. Vemos que para $(x,y) \neq (0,0)$ a função f é um quociente $f(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ onde $P(x,y) = (x+y)\text{sen}(xy)$ e $Q(x,y) = x^2+y^2$. A função $(x,y) \mapsto xy$ é polinomial logo de classe $\mathcal{C}^1$; por composição $(x,y) \mapsto \text{sen}(xy)$ também é de classe $\mathcal{C}^1$. Podemos concluir que a função P é de classe $\mathcal{C}^1$ como produto de duas funções $\mathcal{C}^1$. Visto que Q é um polinômio, ele também é de classe $\mathcal{C}^1$, e $Q(x,y) \neq 0$ para $(x,y) \neq (0,0)$. Portanto f é de classe $\mathcal{C}^1$ em todo ponto $(x,y) \neq (0,0)$ como quociente de duas funções de classe $\mathcal{C}^1$. Só falta estudar a continuidade e a diferenciabilidade no ponto $(x,y) = (0,0)$.

a) Lembramos que $|\text{sen}(u)| \leq |u|$ para cada $u \in \mathbb{R}$; para $u = xy$ obtemos $|\text{sen}(xy)| \leq |xy|$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Combinado com a desigualdade triangular $|x+y| \leq |x| + |y|$, obtemos para todo $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\left| \frac{(x+y)\text{sen}(xy)}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x+y|\,|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} + \frac{|xy^2|}{x^2+y^2}.$$

Percebe que $x^2 \leq x^2+y^2$ logo $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitado, e portanto

$$\frac{|x^2y|}{x^2+y^2} = |y| \frac{x^2}{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

pelo teorema do anulamento. Similarmente, mostramos que $\frac{|xy^2|}{x^2+y^2} \to 0$, e podemos concluir que $f(x,y) \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$. Isto implica que f é contínua na origem, respondendo à pergunta.

b) Começamos por calcular as derivadas parciais de f em $(0,0)$: percebe que $f(x,0) = 0$ para cada $x \neq 0$. Segue que $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$ para cada $x \neq 0$, e que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ depois de passar ao limite. Do mesmo jeito, vemos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Portanto, para saber se f é diferenciável em $(0,0)$, podemos introduzir a função $\varepsilon(x,y)$ dada por

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - \left(f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)}{\|(x,y)\|} = \frac{(x+y)\text{sen}(xy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Mais especificamente, f será diferenciável na origem se e somente se $\varepsilon(x, y)$ tende a 0 quando (x, y) tende a $(0, 0)$. Em restrição ao caminho $\gamma(t) = (t, t)$, temos

$$\varepsilon \circ \gamma(t) = \frac{(2t)\mathrm{sen}(t^2)}{(2t^2)^{3/2}} = \frac{\mathrm{sen}(t^2)}{t^2} \cdot \frac{2t^3}{2^{3/2}|t|^3}.$$

Sabemos que $\mathrm{sen}(t^2)/t^2 \to 1$ quando $t \to 0$, e para $t > 0$, o quociente $t^3/|t|^3$ também tende a 1, logo $\varepsilon \circ \gamma(t)$ não tende a zero quando t tende a zero. Isto mostra que f não é diferenciável na origem. $\square$

Questão 2. Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, |y| \leq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calcular

$$\iint_D xy \, dxdy.$$

Resolução. Método 1: coordenadas polares.
A mudança de variáveis polares pode ser vista como um difeomorfismo $\varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\mathrm{sen}(\theta))$ entre $\mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ e $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$. Percebe que o ponto $(0, 0)$ pertence a D mas não a $\mathrm{Im}(\varphi)$; isto não importa porque o conjunto $\{(0, 0)\}$ tem medida nula, logo $\iint_D xy \, dxdy = \iint_{D^*} xy \, dxdy$ onde $D^* = D \setminus \{(0, 0)\}$.

Em coordenadas polares, o espaço D^* pode ser escrito $D^* = \{(r\cos(\theta), r\mathrm{sen}(\theta)) | 0 < r \leq 1, -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4\}$. Introduzimos o espaço $\tilde{D} = \{(r, \theta) \mid 0 < r \leq 1, -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4\}$, assim que φ define um difeomorfismo entre $\tilde{D}$ e D^*. O determinante do jacobiano de φ vale $\det(J\varphi_{(r,\theta)}) = r\cos^2(\theta) + r\mathrm{sen}^2(\theta) = r$, logo a fórmula de mudança de variável dá

$$\iint_{D^*} xy \, dxdy = \iint_{\tilde{D}} r^2 \cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) \, r dr d\theta.$$

Aplicando depois o teorema de Fubini, vemos que

$$\iint_{\tilde{D}} r^3 \cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) \, r dr d\theta = \left(\int_{r=0}^{1} r^3 \, dr \right) \left(\int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) d\theta \right).$$

Percebe que $\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\mathrm{sen}^2(\theta)$, assim que

$$\int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}^2(\pi/4) - \mathrm{sen}^2(-\pi/4)\right) = 0.$$

Em conclusão, a integral $\iint_D xy \, dxdy$ vale zero.

Método 2: simplificar a integral por simetrias.
Percebe que a simetria $(x, y) \mapsto (x. - y)$ deixa D invariante e que a função $(x, y) \mapsto xy$ é antisimétrica com respeito a ela; logo a integral deveria ser zero. Para formalizar esta ideia, introduzimos a aplicação $\varphi(x, y) = (x, -y)$ e os espaços D^+, D^- dados por $D^+ = D \cap \{y \geq 0\}$ e $D^- = D \cap \{y \leq 0\}$. Temos $D = D^+ \cup D^-$ e $D^+ \cap D^- = [0, 1] \times \{0\}$ é de medida zero, logo

$$\iint_D xy \, dxdy = \iint_{D^+} xy \, dxdy + \iint_{D^-} xy \, dxdy.$$

A aplicação φ restringida a D^- é um difeomorfismo entre D^- e D^+, e o determinante do jacobiano de φ vale -1, logo pela fórmula de mudança de variável (introduzindo $f(x,y) = xy$),

$$\iint_{D^+} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^-} f \circ \varphi(x,y)|\det(J\varphi)|dxdy = \iint_{D^-} (-xy)dxdy.$$

Vemos que $\iint_{D^+} xy\,dxdy = -\iint_{D^-} xy\,dxdy$ assim que $\iint_D xy\,dxdy = 0$. □

Questão 3. Considere uma sequência de matrizes $A_n \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ satisfazendo as três propriedades

(1) $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$,

(2) para cada n, A_n é invertível,

(3) $A_n^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$.

a) Mostrar que A é invertível e que $A^{-1} = B$.

b) Ainda podemos concluir que A é invertível sem a propriedade (3)?

Resolução. a) Considere a aplicação $f : \mathrm{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ dada por $f(M,N) = MN$. Escrevendo explicitamente os coeficientes do produto MN, vemos que esta aplicação é polinomial e portanto contínua. Visto que $A_n \to A$ e $A_n^{-1} \to B$, a continuidade de f nos certifica que $f(A_n, A_n^{-1}) \to f(A,B)$. Mas a sequência $f(A_n, A_n^{-1})$ é constante igual à matriz identidade I, logo $f(A,B) = I$, ou seja $AB = I$, concluindo a primeira pergunta.

b) Sem a propriedade (3), não podemos concluir que A é invertível. De fato, a propriedade (2) diz que A_n pertence ao subespaço $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ das matrizes invertíveis. Este subespaço não é fechado, então uma sequência (A_n) de pontos de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ pode convergir para algum ponto $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ que não pertence a $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$. Podemos facilmente encontrar exemplos de tais sequências, a mais simples sendo talvez $A_n = \frac{1}{n}I$: para cada $n \neq 0$, a matriz $\frac{1}{n}I$ é invertível, mas $\frac{1}{n}I \to 0$, que não é invertível. □

Questão 4. Considere a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi(x,y) = (\mathrm{sen}(y/2) - x,\ \mathrm{sen}(x/2) - y).$$

Mostrar que φ é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}^2$ e $\varphi(\mathbb{R}^2)$, e que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ é aberto.

Resolução. A aplicação φ é obtida por somas e composições de funções de classe $\mathcal{C}^1$, logo ela é de classe $\mathcal{C}^1$. A matriz jacobiana de φ é

$$J\varphi_{(x,y)} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2}\cos(y/2) \\ \frac{1}{2}\cos(x/2) & -1 \end{bmatrix};$$

seu determinante vale $\det(J\varphi_{(x,y)}) = 1 - \frac{1}{4}\cos(x/2)\cos(y/2)$. Percebe que $|\cos(x/2)\cos(y/2)| \leq 1$, logo este determinante nunca vale zero. Vemos que podemos aplicar o teorema da inversão local: para cada ponto $p \in \mathbb{R}^2$, existe abertos $U, V \subset \mathbb{R}^2$ com $p \in U$ e $\varphi(p) \in V$ tais que $\varphi|_U$ define um difeomorfismo entre U e V. Em particular, para cada $q \in \varphi(\mathbb{R}^2)$, podemos escolher algum ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(p) = q$ e aplicar o teorema da inversão local para este ponto p: obtemos um aberto V tal que $V \subset \varphi(\mathbb{R}^2)$ e $q \in V$. Isto mostra que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ é aberto.

Vamos mostrar agora que φ é injetiva. Considere dois pontos p, p' com coordenadas $p = (x, y), p' = (x', y')$ tais que $\varphi(p) = \varphi(p')$. Esta equação pode ser escrita como um sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(y/2) - x = \operatorname{sen}(y'/2) - x' \\ \operatorname{sen}(x/2) - y = \operatorname{sen}(x'/2) - y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(y/2) - \operatorname{sen}(y'/2) = x - x' \\ \operatorname{sen}(x/2) - \operatorname{sen}(x'/2) = y - y'. \end{cases}$$

A desigualdade do valor médio para a função $s \mapsto \operatorname{sen}(s)$ sobre o intervalo $[t/2, t'/2]$ dá

$$|\operatorname{sen}(t/2) - \operatorname{sen}(t'/2)| \leq \left|\frac{t}{2} - \frac{t'}{2}\right| \sup_{s \in [t/2, t'/2]} |\cos(s)| \leq \frac{1}{2}|t - t'|.$$

Utilizando esta desigualdade no sistema acima, obtemos $|x - x'| \leq \frac{1}{2}|y - y'|$ e $|y - y'| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$. Portanto $|x - x'| \leq \frac{1}{4}|x - x'|$, o que só pode ser verdadeiro quando $x = x'$. Similarmente, vemos que $y = y'$, concluindo a prova que φ é injetiva.

Sabendo que φ é injetiva sobre $\mathbb{R}^2$, vemos que ela define uma bijeção entre $\mathbb{R}^2$ e $\varphi(\mathbb{R}^2)$ com inverso $\varphi^{-1} : \varphi(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$. Só falta mostrar que φ^{-1} é de classe $\mathcal{C}^1$. Mas para cada $q \in \varphi(\mathbb{R}^2)$ e $p = \varphi^{-1}(q)$, já vimos que existiam vizinhanças abertas U de p e V de q tais que $\varphi|_U$ seja um difeomorfismo entre U e V. Em particular, $\varphi^{-1}|_V$ é igual ao inverso do difeomorfismo $\varphi|_U$, portanto φ^{-1} é de classe $\mathcal{C}^1$ sobre V. Isto é verdade para qualquer ponto $q \in \varphi(\mathbb{R}^2)$, logo φ^{-1} é de classe $\mathcal{C}^1$ sobre $\varphi(\mathbb{R}^2)$. □

Definição *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto (limitado ou não). Uma* **exaustão** *de U é uma sequência de compactos mensuráveis $K_i \subset U$ tal que $U = \cup K_i$ e $K_i \subset int.K_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Questão 5. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua não-negativa no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.

1. Existe uma constante $c > 0$ tal que $\int_K f(x)\, dx \leq c$ para todo compacto $K \subset U$.

2. Para toda exaustão $U = \cup K_i$, a sequência $\int_{K_i} f(x)\, dx$ converge quando $i \to \infty$.

Neste caso, mostre que para cada exaustão, o limite $\lim \int_{K_i} f(x)dx$ é igual ao supremum $\sup_{K \subset U} \int_K f(x)dx$.

Resolução. (1) $\Rightarrow$ (2): Supomos que existe $c > 0$ tal que $\int_K f(x)\, dx \leq c$ para cada compacto $K \subset U$. Seja $U = \cup K_i$ uma exaustão de U. Visto que $f(x) \geq 0$ para cada $x \in U$ e que $K_i \subset K_{i+1}$ para cada i, vemos que $\int_{K_i} f(x)\, dx \leq \int_{K_{i+1}} f(x)\, dx$.

A sequência $\int_{K_i} f(x)\,dx$ é uma sequência crescente e limitada de números reais, logo ela converge.

(2) $\Rightarrow$ (1): Vamos fazer um raciocínio por contradição e mostrar que se (1) é falso, (2) também será falso. Supõe que para cada $c > 0$ existe um compacto $K_c \subset U$ tal que $\int_{K_c} f(x)\,dx > c$. Para $c = n \in \mathbb{N}$ obtemos uma sequência de compactos (K_n) tal que $\int_{K_n} f(x)\,dx \to \infty$.

A priori esta sequência não é uma exaustão; fixa uma exaustão qualquer $U = \cup C_i$ e introduz $U_i = \text{int}C_i$. Visto que $C_i \subset U_{i+1}$, também temos $U = \cup U_i$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos um recobrimento aberto $K_n \subset \cup U_i$ do compacto K_n, logo pela propriedade de Borel-Lebesgue, existe um sub-recobrimento finito $K_n \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}$. Como $U_i \subset U_{i+1}$ para cada i, temos de fato $K_n \subset U_{i(n)}$ onde $i(n) = \max(i_1, \ldots, i_k)$. Em particular, $\int_{C_{i(n)}} f \geq \int_{K_n} f \geq n$ e a sequência $\int_{C_i} f$ não é limitada, logo não converge.

Para mostrar a segunda parte da questão, consideramos uma função f satisfazendo as propriedades (1) e (2), e uma exaustão (K_i). Pelo ponto (1), o supremum $S = \sup_{K \subset U} \int_K f$ é finito; pelo ponto (2), a sequência $\int_{K_i} f$ converge para algum número real I; queremos mostrar que $I = S$.

Por definição de S, temos $\int_{K_i} f \leq S$ para cada índice i, então já sabemos que $I \leq S$. Seja $\varepsilon > 0$, por definição do supremum, existe um compacto $K \subset U$ tal que $\int_K f > S - \varepsilon$. Pela propriedade $K_i \subset \text{int}K_{i+1}$, vemos que $U = \cup \text{int}K_{i+1}$, e $K \subset \cup \text{int}K_i$. Isto é um recobrimento aberto do compacto K, então pela propriedade de Borel-Lebesgue podemos extrair um sub-recobrimento finito: $K \subset \text{int}K_{i_0} \cup \ldots \cup \text{int}K_{i_n}$. Seja $i_+ = \max(i_0, \ldots, i_n)$; do fato que $K_i \subset K_{i+1}$ para cada i, deduzimos que $K \subset \text{int}K_{i_+}$. Isto implica que $\int_K f \leq \int_{K_{i_+}} f$, e logo $\int_{K_{i_+}} f > S - \varepsilon$. Segue que $I \geq S - \varepsilon$ e como isto é verdadeiro para cada $\varepsilon > 0$, temos que ter $I \geq S$, terminando a prova. $\square$