Nome: ____

Exame de Qualificação em Álgebra 2024.1

Questão	1	2	3	4	5	Total
Nota						
Valor	20	20	20	20	20	100

(1) Sejam p e q primos tais que $p > q$ e $|G| = p^2q^2$. Se $|G| \neq 36$, mostre que G possui um p-subgrupo de Sylow normal.

(2) (i) Provar que G é um grupo abeliano se, e somente se, $(ab)^2 = a^2b^2$, para todos $a, b \in G$.
(ii) Exiba explicitamente dois elementos $a, b \in D_3$ tais que $(ab)^2 \neq a^2b^2$.
(iii) Provar que se todo elemento de um grupo G é o inverso de si mesmo, então G é abeliano.

(3) Seja R um domínio de ideais principais e lembramos que, em anéis comutativos, todo ideal maximal é um ideal primo. Mostre que um elemento de R é primo se, e somente se, é irredutível.

(4) Seja R um anel e suponha que a função

$$f\colon R \to R \quad \text{tal que} \quad f(x) = x^2$$

é um endomorfismo de R (como anel).
(i) Mostre que R é um anel comutativo.
(ii) Mostre que a equação $x + x = 0$ é uma identidade em R (ou seja, que todo elemento $x \in R$ a satisfaz).
(iii) Prove que $\{1 + x : x \in \ker f\} \subset R^*$, onde R^* denota o conjunto das unidades de R.

(5) Mostre que dado um par (V, T), onde V é um F-espaço vetorial e $T\colon V \to V$ é uma transformação linear, podemos considerar o espaço V como um $F[x]$-módulo. Reciprocamente, dado um $F[x]$-módulo, mostre como obter um par da forma acima.

Boa prova!