Exame de Qualificação em Álgebra Linear (06/01/2021)
Programa de Mestrado UFF **2020-2**

Você pode consultar passivamente o que desejar: livros, fóruns, websites, etc. Em cada questão, indique que fontes você usou. 'Passivamente" significa que você não deve abordar a questão (ou partes dela) com qualquer outro humano, seja pessoalmente, por e-mail, por áudio, num fórum da web, etc. Você não precisa digitar suas respostas; você pode, se desejar, escrever em papel e submeter 'scans" de seu trabalho. Isto dito, por favor, confirme a legibilidade do trabalho submetido.

1. Encontre as possíveis formas canônicas de Jordan e as forma racionais das matrizes $A \in M_{10\times 10}(\mathbb{R})$ que possuem polinômio caraterístico $p_A(x) = x^2(x+1)^4(x+2)^4$ e tais que

$$\dim \mathrm{Nucleo}(A) = 1,\ \dim \mathrm{Nucleo}(A+I) = 3 \text{ e } \dim \mathrm{Nucleo}(A+2I) \geq 2.$$

2. Seja A uma matriz em $M_{n\times n}(F)$ tal que

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \ldots = \mathrm{tr}(A^n) = \mathrm{tr}(A^{n+1}),$$

onde $\mathrm{tr}(B)$ é o traço da matriz B.

a) Mostre que $\mathrm{tr}(A^m) = \mathrm{tr}(A)$ para todo $m \geq 1$;

b) Mostre que o polinômio minimal de A é da forma $x^p(x-1)^q$.

3. Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto de $L(V,V)$ onde V é um espaço vetorial de dimensão finita e positiva. Suponha que todo par (T,W), formado por um elemento T de $\mathcal{F}$ e um subespaço T-invariante W de V com $\dim(W) \geq 1$, cumpre que T possui um autovetor em W. Suponha que $ST = TS$ para quaisquer $S,T \in \mathcal{F}$. Mostre que todos os operadores de $\mathcal{F}$ possuem um autovetor comum.

4. Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Suponha que

- Os polinômios característicos p_A e p_B de A e B são iguais,
- os polinômios minimos m_A e m_B de A e B são iguais e
- $\frac{p_A}{m_A} = \frac{p_B}{m_B}$ e $\frac{p_A}{m_A}$ é um produto $(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_k)$ de fatores lineares distintos.

Mostre que A e B são matrizes semelhantes.

5. Seja $T \in L(V,V)$ um operador de um espaço com produto interno complexo de dimensão finita. Mostre ou dê um contraexemplo:

a) Se T possui exatamente 2 autovalores 1 e -1 e $\mathrm{Nuc}(T-I) \subset (\mathrm{Nuc}(T+I))^{\perp}$, então T é normal.

b) Se T possui exatamente 2 autovalores 1 e -1 e $\mathrm{Nuc}(T-I) = (\mathrm{Nuc}(T+I))^{\perp}$, então T é autoadjunto.