**Exame de Qualificação em Álgebra Linear (24/08/2020)**
**Programa de Mestrado UFF** **2020-1**

Você pode consultar passivamente o que desejar: livros, fóruns, websites, etc. Em cada questão, indique que fontes você usou. 'Passivamente" significa que você não deve abordar a questão (ou partes dela) com qualquer outro humano, seja pessoalmente, por e-mail, por áudio, num fórum da web, etc. Você não precisa digitar suas respostas; você pode, se desejar, escrever em papel e submeter 'scans" de seu trabalho. Isto dito, por favor, confirme a legibilidade do trabalho submetido.

1. Sejam $U, W$ subespaços de um espaço vetorial $V$ tais que $V/U$ e $V/W$ são de dimensão finita (mas a dimensão de $V$ não é necessariamente finita). Mostre que $V/(U \cap W)$ tem dimensão finita.

2. Seja $T \in L(V,V)$ onde $\dim V < \infty$. Suponha que $P(x) \in F[x]$ é um polinômio irredutivel tal que $\mathrm{Nuc}(P(T)) \neq \{0\}$. Mostre que $P$ divide ao polinômio minimal de $T$.

3. Seja $T \in L(V,V)$ onde $V$ é um espaço vetorial complexo de dimensão finita.

   **a)** Suponha que $T$ possui um único bloco de Jordan associado ao único autovalor $c$. Mostre que existe um número finito de subespaços $T$-invariantes e descreva os mesmos.

   **b)** Mostre que $T$ possui um número finito de subespaços invariantes se, e somente se, para todo autovalor $c$ de $T$, existe um único $c$-bloco de Jordan.

4. Seja $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ tal que $T^5 - 6T^4 + 8T^3 + 6T^2 - 9T = 0$. Calcule a forma de Jordan e a forma racional de $T$ se $T$ é sobrejetiva, $T + I$ é injetiva, $\dim(\mathrm{Nuc}(T - I)^4) = 1$ e $T$ não é diagonalizável.

5. Seja $T \in L(V,V)$ um operador positivo definido em um espaço com produto interno de dimensão finita. Mostre que existe um único operador positivo $S$ de $V$ tal que $S^2 = T$.