Exame de Qualificação.

20 de agosto de 2014.

1. Determine se cada uma das seguintes afirmaçẽs é verdadeira ou falsa e justifique:

   (a) Um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se e somente se é conexo por caminhos.

   (b) Existe um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ (não vazio), tal que X não possui um subconjunto enumerável denso em X.

   (c) Se $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y = \xi(x) \in \mathbb{R}$ tal que $f(x, \xi(x)) = 0$, então a função ξ é contínua.

   (d) Se $f : U \to \mathbb{R}^m$ é uma submersão de classe C^k, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+p}$, e $g : f(U) \to \mathbb{R}^n$ é tal que $g \circ f : U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^k, então g é de classe C^k.

   (e) Se uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo de classe C^1 então f é um difeomorfismo.

2. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios de coeficientes reais e grau ≤ 2, munido de qualquer norma. Considere a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por
$$F(x, y)(t) = xt^2 + yt + xy.$$
   Mostre que F é de classe C^∞, e calcule $DF(a, b) \cdot (u, v)$.

3. (a) Enuncie o teorema da função implícita para uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

   (b) Enuncie o teorema da função inversa.

   (c) Prove o teorema da função inversa usando o teorema da função implícita (*dica*: considere uma aplicação como $(x, y) \to x - f(y)$. Use ese argumento duas vezes).

4. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Prove que se
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$
   para quaisquer $x, y \in U$ (onde $M > 0$ é uma constante) então $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in U$.

5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita.
   (a) Se $T : V \to V$ é um operador linear, defina polinômio característico e polinômio minimal de T. Que relações existem entre um e outro polinômio?
   (b) Mostre que se $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ são matrizes semelhantes, elas têm o mesmo polinômio característico. E o minimal, também é o mesmo?.
   (c) Defina operador diagonalizável em V.
   (d) Enuncie e prove uma condição necessária e suficiente para que um operador em V seja diagonalizável.
6. (a) Explique que é a forma canônica de Jordan de um operador em um espaço de dimensão finita. Sempre é possível achar a forma de Jordan de um operador? Se não, exiba um exemplo de uma matriz 2×2 que não tenha forma de Jordan.
   (b) Explique que é a forma canônica Racional de um operador em um espaço de dimensão finita. Sempre é possível achar a forma Racional de um operador? Se sim, ache a forma Racional do seu exemplo do item 1).
   (c) Encontre a forma de Jordan, e uma base de Jordan do seguinte operador:
   $$T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid T(f(t)) = f''(t)(\text{derivada segunda}).$$
   Encontre a forma Racional, e uma base onde T assuma essa forma.
7. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita.
   (a) Defina produto interno em V. Sempre existe um produto interno em V?
   (b) Se T é um operador normal de V e v é autovetor de T associado ao autovalor λ mostre que v é autovetor de T^*.
   (c) Para v como no item anterior, seja $W = [v]$ o espaço gerado por v. Mostre que $W^\perp$ é invariante por T.
   (d) Enuncie e prove o teorema espectral para operadores normais. (Dica: indução em $\dim V$.)