Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
Pós-Graduação em Matemática

Exame de Qualificação do Mestrado 2012

Aluno(a):____

Álgebra Linear

1. (a) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Se sabe que $(0,0,1,1)$ é auto-vetor de A e que A possui um único auto-valor no corpo dos números complexos. Determine a forma canônica de Jordan e racional de A. A matriz A é diagonalizavel?

(b) Seja A uma matriz complexa com todos auto-valores complexos iguais. Prove que A é diagonalizavel se e somente se é diagonal.

2. Seja I_n a matriz identidade $n \times n$.

(a) Mostre que se N é uma matriz complexa 3×3 nilpotente, então

$$A := I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$$

é uma raiz quadrada de $I_3 + N$.

(b) Use a série de Taylor[1] de $(1+t)^{\frac{1}{2}}$ para obter uma fórmula similar para uma raiz quadrada de $I_n + N$, onde N é uma matriz $n \times n$ nilpotente.

(c) Mostre que toda matriz complexa não singular $n \times n$ possui uma raiz quadrada.

3. Seja M uma matriz real simétrica tal que traço$(M^2) = 0$. Prove que $M = 0$.

4. Seja V um espaço vetorial munido de produto interno. Sejam S, T operadores lineares auto-adjuntos de V tais que $TS = ST$. Mostre que existe uma base ortonormal de V que diagonaliza simultaneamente S e T.

[1] Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, lembre da fórmula de Taylor $(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n \geq 1} \binom{\alpha}{n} t^n$ onde o binomial é definido por $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$

Análise

1. Seja X um espaço métrico. Mostre que X é compacto se, e somente se, satisafz a propriedade de interseção finita.

2. Seja $F : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

   (a) Mostre que, se U for convexo, então F é Lipschitz.

   (b) Mostre, através de um contra-exemplo, que a convexidade de U é necessária.

3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, tal que $f(3, -1, 2) = 0$ e

$$Df(3, -1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que existe um aberto $B \subset \mathbb{R}$ contendo 3 e $g : B \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, tal que $f(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$ e $g(3) = (-1, 2)$.

   (b) calcule $Dg(3)$.

4. Seja L um reticulado de funções contínuas reais definidas num compacto K (lembre-se de que L é um reticulado de funções, se $f, g \in L$ então temos $\max(f, g), \min(f, g) \in L$. Seja

$$h(x) = \inf_{f \in L} f(x).$$

   Suponha que h seja contínua. Mostre que dado $\epsilon > 0$, existe $g \in L$ tal que

$$0 < g(x) - h(x) < \epsilon, \quad x \in K$$

Bom Exame !!!