Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
Pós-Graduação em Matemática

Exame de Qualificação do Mestrado 2012

Aluno(a):____

Álgebra Linear

Faça a 4º questão depois escolha e faça **apenas** 2 das 3 primeiras questões.

1) Seja $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy - 2xz + 4yz$ uma forma quadrática em $\mathbb{R}^3$.

a) Encontre a matriz associada a esta forma quadrática e calcule os seus autovalores e autovetores.

b) Encontre uma matriz ortogonal U de tal forma que $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] = U\left[\begin{smallmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{smallmatrix}\right]$ e satisfaça $q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = a\bar{x}^2 + b\bar{y}^2 + c\bar{z}^2$, para convenientes $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2) Sejam E um espaço vetorial complexo de dimensão $n > 1$, com produto interno (hermitiano) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : E \to E$ um operador linear. Dizemos que T é anti-hermitiano se para quaisquer $u, v \in E$ tem-se que $\langle T(u), v \rangle = -\langle u, T(v) \rangle$. Assuma que T é anti-hermitiano e mostre que:

a) Os autovalores de T são do tipo αi, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Mais ainda se λ e $\gamma \in \mathbb{C}$ são auto-valores distintos de T e se u, $v \in E$ são tais que $T(u) = \lambda u$ e $T(v) = \gamma v$ então $\langle u, v \rangle = 0$.

b) Existe uma base ortonormal de E formada por autovetores de T.

3) Sejam $T_1, T_2 \in End_{\mathbf{K}}(E)$ dois endomorfismos de E, onde E é um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbf{K}$. Suponha que $T_1T_2 = T_2T_1$. Mostre que existem subespaços $E_1, \ldots, E_k$ para algum $k \geq 1$ tais que $E = \oplus_{j=1}^{k} E_j$ e, se $v \in E_j$ para algum j, então v é um autovetor generalizado para todo T_i, com $i = 1, 2$.

Dizemos que v é um autovetor generalizado de um operador A se v pertence ao núcleo de $(A - \lambda I)^n$, para algum natural n.

4) Considere o operador linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine as matrizes D diagonal e N nilpotente tais que: $A = D + N$ e $DN = ND$;

(b) Determine as formas canônicas racional e de jordan de A. Encontre também matrizes que mostram que A é semelhante a estas formas canônicas.

Análise

Faça três questões das listadas a seguir:

1) Denote $GL(n,\mathbb{R})$ o grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis. Seja

$$F : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \det(A).$$

Mostre que F é diferenciável, em particular contínua, e calcule DF.

2) Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, uma sequência de funções não-decrescentes, que converge pontualmente para uma função contínua. Mostre que a convergência é de fato uniforme.

3) Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$F(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos(y), \mathrm{e}^x \mathrm{sen}(y)).$$

(a) Mostre que para qualquer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$, F é localmente um difeomorfismo.

(b) Seja F^{-1} a inversa local de F definida numa vizinhança de $F(2, \pi/4) = (u_0, v_0)$. Calcule $DF^{-1}(u_0, v_0)$.

(c) Mostre que F não pode ser um difeomorfismo global.

4) Seja $L^{1/2}(\mathbb{R})$ o conjunto das funçõees reais contínuas tais que

$$\int_{\infty}^{\infty} |f(x)|^{1/2} \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Seja

$$d(f,g) = \int_{\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^{1/2} \, \mathrm{d}x.$$

Mostre que $\big(L^{1/2}(\mathbb{R}), d\big)$ é um espaço métrico.

5) Lembre-se de que definimos um conjunto *denso em lugar algum*, se o complementar do seu fecho for denso. Seja V um espaço normado e $F \subset V$ um subespaço própio fechado. Mostre que F é denso em lugar algum.

Bom Exame !!!