Universidade Federal Fluminense
Pós-Graduação em Matemática
Prova de Mestrado

Escolha e resolva 3 questões da Prova de Álgebra Linear e 3 questões da Prova de Análise

---

Prova de Álgebra Linear

1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Determine a forma canônica de Jordan de um operador nilpotente $T : V \to V$ de índice 4 tal que $\dim V = 11$, $\dim T(V) = 6$, $\dim T^2(V) = 3$ e $\dim T^3(V) = 1$.

2. Considere os polinômios
$$f(x) = (x^2+1)^3 \cdot (x-2)^4 \qquad \text{e} \qquad g(x) = (x^2+1)^2 \cdot (x-2)^2.$$

   (a) Determine todas as formas de Jordan possíveis para matrizes $n \times n$ complexas cujos polinômios mínimo e característico sejam, respectivamente, $f(x)$ e $g(x)$.

   (b) Para cada forma de Jordan encontrada, determine a forma canônica racional correspondente.

3. Seja V o espaço vetorial real das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Considere o produto interno $\langle A , B \rangle =$ Traço$(A^T \cdot B)$.

   (a) Seja P uma matriz ortogonal, isto é, $P^T = P^{-1}$. Prove que a aplicação linear $\rho_P : V \to V$ dada por $\rho_P(A) = PAP^{-1}$ é uma isometria de V com respeito a $\langle \ , \ \rangle$.

   (b) Sejam $A \in V$ e $\|A\| = \sqrt{\langle A , A \rangle}$ a norma de A. Prove que toda $A \in V$ simétrica possui ao menos um autovalor menor ou igual a $\|A\|/\sqrt{n}$ e ao menos um autovalor maior ou igual a $\|A\|/\sqrt{n}$.

   Sugestão: expressar $\|A\|$ em termos dos autovalores de A.

4. Seja T um operador linear em um espaço vetorial complexo V com produto interno.

   (a) Mostre que se W é um subespaço de V invariante por T então $T^\star(W^\perp) \subset W^\perp$.

   (b) Mostre que as seguintes afirmações sobre T são equivalentes:

   i. T é normal.

   ii. $\|T(v)\| = \|T^\star(v)\|$ para todo $v \in V$.

   iii. Se $v \in V$ e $c \in \mathbb{C}$ são tais que $T(v) = c\,v$, então $T^\star(v) = \overline{c}\,v$.

   iv. Existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.

Prova de Análise

1. **(a)** Seja $f : X \times K \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, onde $X \subset \mathbb{R}^m$ e $K \subset \mathbb{R}^p$ é compacto. Então para todo $x_o \in X$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X,\ |x - x_o| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_o,y)| < \varepsilon$ seja qual for $y \in K$.

(b) Uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diz-se positiva quando é simétrica e, além disso, $\langle Ax, x \rangle > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Mostre que o conjunto das aplicações lineares positivas é convexo e aberto no conjunto das aplicações simétricas.

2. **(a)** Mostre que a aplicação $G : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$, dada por $G(X, Y) = X^2 Y$, é de classe C^∞ e calcule $G'(X, Y)(V, W)$ para quaisquer $X, Y, V, W \in \mathbb{R}^{n^2}$.

   (b) Use (a) e o Teorema da Função Implícita para mostrar que a aplicação $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n^2}$, $g(X) = X^{-2}$, é de classe C^∞ e para calcular $g'(X_0)V$ para todo $V \in \mathbb{R}^{n^2}$ e para todo $X_0 \in \mathcal{U} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n^2} \,\middle|\, \det X \neq 0 \right\}$.

   (c) Verifique que $g'(I)$ é um isomorfismo e conclua que existe um aberto $W \subset U$, com $I \in W$, de modo que $g : W \to \varphi(W)$ seja um difeomorfismo de classe C^∞ sobre o aberto $\varphi(W)$.

3. Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 no conjunto aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $\langle f'(x) \cdot v, v \rangle > 0$ para todo $x \in U$ e todo $v \in \mathbb{R}^m - \{0\}$, então f é um difeomorfismo de U sobre um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Dê um exemplo em que $U = \mathbb{R}^m$, mas f não é sobrejetiva.

4. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma submersão de classe C^1 que é uma aplicação própria. Mostre que existe uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^m$ tal que: $\|x_k\| = k$, $\lim\limits_{k\to\infty} \|f(x_k)\| = +\infty$ e $\|f(x)\| \leq \|f(x_k)\|$ para todo $x \in B[0, k]$ e para todo $k \in \mathbb{N}$.

   Sugestão: lembre que a aplicação f é dita própria se, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto $f^{-1}(K) \subset \mathbb{R}^m$ é compacto.
