Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática
Coordenação de Pós-Graduação

Exame de Mestrado

2007.1

Faça **todos** os exercícios da **Parte A** e escolha **dois** dentre os exercícios **4** , **5** e **6**. Quem está **dispensado** da Parte A deve fazer **todos** os exercícios da **Parte B**.

Parte A: Análise

1. Denotemos por $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a 2, munido da norma $\|\cdot\|$ do máximo do módulo dos coeficientes. Seja $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ um polinômio de grau 2 e suponha que p tem 2 raízes reais distintas.

(i) Mostre que existe $\delta > 0$ satisfazendo a condição: se $\|p - q\| < \delta$ então q também possuiu duas raízes reais distintas ;

Para cada $q \in \mathrm{B}_\delta(p) \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ denotemos por $R^+(q)$ a maior das raizes reais de q e por $R^-(q)$ a menor delas.

(ii) Mostre que a aplicação $q \in \mathrm{B}_\delta(p) \xrightarrow{R^+} R^+(q) \in \mathbb{R}$ é de classe C^∞.

(iii) O que se pode dizer da classe de diferenciabilidade da aplicação R^- ?

(iv) Interprete o resultado.

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^r $(r \geq 1)$ que é injetora e tal que $Df(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se f é uma aplicação *própria*[1] então f é um difeomorfismo.

3. Use a *Desigualdade do Valor Médio* para provar que a aplicação

$$f(x\,,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \quad \text{para todo} \quad x\,,y \in \mathbb{R}$$

é uma aplicação de Lipschitz.

[1] Uma aplicação contínua f é dita *própria* quando a imagem inversa de compactos é compacto.

$\boxed{\textbf{Parte B: Álgebra Linear}}$

4. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita e sejam T, S dois operadores lineares sobre V.

(i) Se $TS = ST$ prove que a imagem por S de um subespaço invariante por T é ainda invariante por T.

(ii) Suponha que os autovetores de T geram o espaço V e que os subespaços invariantes por T são também invariantes por S. Mostre que $TS = ST$.

5. Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o operador linear cuja matriz na base canônica tem todos os elementos iguais a 1.

(i) Calcule os polinômios característico e minimal de T e ache os autovalores e autovetores.

(ii) Mostre que $\mathbb{R}^n = N(T) \oplus Im(T)$.

(iii) Ache uma base de $\mathbb{R}^n$ na qual a matriz de T tenha $n^2 - 1$ zeros.

6. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, e sejam $u\,, w \in V$ não nulos. Seja $T\colon V \to V$ o operador linear dado por:

$$T(v) = \langle v, u \rangle\, w.$$

(i) Prove que T é auto-adjunto se, e somente se, w é múltiplo de u.

(ii) Prove que T é não-negativo se, e somente se, pode-se tomar $w = u$.

7. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear normal. Se W é um subespaço T-invariante, mostre que a restrição de T a W é um operador normal.

8. Suponha que o espaço vetorial V admita uma base formada por autovetores de um operador linear T. Prove que é possível definir um produto interno em V em relação ao qual T é auto-adjunto.