UFF - IME - GPM - Exame de Análise

26 de agosto de 2021

1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e limitado e seja $\{ U_i \}_{i \in I}$ uma cobertura finita de X por abertos de $\mathbb{R}^n$ Provar que existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in X$ são tais que $\| x - y \| < \delta$ então existe $i \in I$ tal que $x, y \in U_i$.

   a) Se X for limitado mas não fechado, pode se concluir o mesmo? Provar ou dar um contraexemplo.

   b) Se X for fechado mais não limitado, pode se concluir o mesmo? Provar ou dar um contraexemplo.

2. Estudar a convergencia uniforme das series:

   a) $\sum n^2 \left(e^{-x}\right)^n$ no intervalo $(0, a]$ com $a > 0$, e no intervalo $[a, +\infty)$ com $a > 0$.

   b) $\sum x^n (\log(x))^2$ no intervalo $(0, 1)$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, e $a \in \mathbb{R}$ tal que $X = f^{-1}(a)$ é um conjunto compacto. Mostre que existe $P \in X$ tal que uma das alternativas ocorre:

   i) $f(P + V) > f(P)$ para todo $V \in \mathbb{R}^n$ com $\langle P, V \rangle > 0$, ou

   ii) $f(P + V) < f(P)$ para todo $V \in \mathbb{R}^n$ com $\langle P, V \rangle > 0$.

4. Sejam $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $\det(F'(x)) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $K \in \mathbb{R}^n$ um compacto e $z \in F(\mathbb{R}^n)$. Mostre que existe um $d > 0$ tal que se $x, y \in K$ são tais que $F(x) = F(y) = z$, então $|x - y| > d$.

5. Dada a elipse $\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, para que valores positivos de a e b Γ contém o circulo $(x-1)^2 + y^2 = 1$? Entre tais valores, encontrar a e b para os quais a área de Γ, dada por πab, é minima.

6. Descrever, perto dos pontos $(1, 1)$ e $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, o conjunto

$$Z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \sin(x) = y \sin(y) \right\}.$$