Exame de Qualificação em Análise (06/01/2021)
Programa de Mestrado UFF

Você pode consultar passivamente o que desejar: livros, fóruns, websites, etc. Em cada questão, indique que fontes você usou. "Passivamente" significa que você não deve abordar a questão (ou partes dela) com qualquer outro humano, seja pessoalmente, por E-mail, por áudio, num fórum da web, etc.

Você não precisa digitar suas respostas – você pode, se desejar, escrever em papel e submeter "scans" de seu trabalho. Isto dito, por favor, confirme a legibilidade do trabalho submetido.

---

1) Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Considere as afirmações:
i) X é conexo;
ii) Para todo $Y \subseteq X$, se $\partial Y \cap X = \emptyset$ então $Y = \emptyset$ ou $Y = X$.
Pergunta-se:
a) (i) implica (ii)? Justifique.
b) (ii) implica (i)? Justifique.

---

2) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e convexo. Suponha que a função $f : U \to \mathbb{R}$ tem derivadas parciais limitadas para todo $p \in U$, isto é, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\partial_i f(p)| \leq M$$

para todo $p \in U$.
a) Mostre que f é uniformemente contínua em U.
b) Mostre que f pode ser estendida ao fecho de U de maneira contínua.
c) Os resultados em (a) e (b) continuam valendo trocando "convexo" por "conexo"? Justifique.
d) Os resultados em (a) e (b) continuam valendo sem a hipótese das derivadas parciais serem limitadas? Justifique.

---

3) Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$ uma hiperfície compacta de classe C^1. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, mostre que existe $p \in M$ tal que v é ortogonal a T_pM.

---

4) Sendo $\times$ o produto vetorial usual em $\mathbb{R}^3$, considere a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^6 \sim \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^6 \sim \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ & (\vec{v}_1; \vec{v}_2) & \longmapsto & ((\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) + \vec{v}_1; \vec{v}_2) \end{array}.$$

Mostre que ela é diferenciável e calcule a sua derivada. Em que pontos $(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \mathbb{R}^6$ ela é uma imersão? Uma submersão? Enfim, dado $\vec{w} \in \mathbb{R}^6$, o que podemos afirmar sobre a estrutura das soluções da equação

$$f(\vec{v}_1; \vec{v}_2) = \vec{w} \quad ?$$

---

5) Seja $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1. Mostre que existe um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^3$ e uma função contínua e injetiva $g : U \to \mathbb{R}^5$ tal que $f \circ g$ é constante.

Boa sorte!