Exame de Qualificação em Análise (24/08/2020)
Programa de Mestrado UFF

Você pode consultar passivamente o que desejar: livros, fóruns, websites, etc. Em cada questão, indique que fontes você usou. "Passivamente" significa que você não deve abordar a questão (ou partes dela) com qualquer outro humano, seja pessoalmente, por E-mail, por áudio, num fórum da web, etc.

Você não precisa digitar suas respostas – você pode, se desejar, escrever em papel e submeter "scans" de seu trabalho. Isto dito, por favor, confirme a legibilidade do trabalho submetido.

---

1) a) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

Pode-se afirmar que f é uniformemente contínua?

b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua com a seguinte propriedade: para todo $v \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\lim_{t \to \infty} f(tv) = 2020.$$

Pode-se afirmar que f é uniformemente contínua?

---

2) Suponha $1 < a < b$ e sejam $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que

$$g(tv) = t^a g(v) \text{ e } h(tv) = t^b h(v) \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } v \in \mathbb{R}^n$$
$$g(v), h(v) > 0 \text{ para todo } v \neq 0$$

e defina $F(v) = g(v) - h(v)$. Mostre que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \mid \langle \nabla F(x), x \rangle = 0\}$$

é uma hiperfície de classe C^1.

---

3) Mostre que a seguinte aplicação é diferenciável e calcule a sua derivada

$$\begin{array}{rccc} f: & M_n \times M_n & \to & M_n \\ & (X, Y) & \longmapsto & 2X^2Y^3 - X \end{array}$$

onde $M_n \sim \mathbb{R}^{n^2}$ é o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Existe alguma vizinhança em torno de $(X, Y) = (I, I)$ onde ela é uma imersão? Uma submersão? O que isso nos diz sobre as soluções da equação

$$2X^2Y^3 - X = M$$

para M numa vizinhança da identidade?

---

4) Suponha $m > n$ e seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Mostre que existe uma função contínua e injetiva $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ tal que $f \circ g$ é constante.

Boa sorte!