PGMAT — UFF
Exame de Qualificação do Mestrado em Análise
23/03/2019

Questões

1. Se $n \in \mathbb{Z}^+$ e $x \in \mathbb{R}$ definamos
$$f_n(x) := \frac{x}{1+nx^2}.$$
Mostre que a sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente.

2. Seja $f_\alpha(x,y) = \dfrac{x^2|y|^\alpha}{x^2+y^2}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinar os valores de α tais que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y)$ exista.

3. (a) Uma *contração* em um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $T\colon X \to X$ para a qual que existe uma constante $0 \leq c < 1$ com a propriedade de que
$$|Tx - Ty| \leq c|x-y|,$$
para quaisquer $x, y \in X$. Mostre que, se X é completo, então uma contração $T\colon X \to X$ tem um *ponto fixo*, isto é, um ponto $x \in X$ tal que $T(x) = x$. Mostre, também, que tal ponto fixo é único.

   (b) Uma *contração fraca* em um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $T\colon X \to X$ com a propriedade de que
$$|Tx - Ty| < |x-y|,$$
para todos $x, y \in X$ distintos. Prove que, se X é compacto, então uma contração fraca $T\colon X \to X$ tem um ponto fixo, e que este ponto fixo é único.

   (c) Dê um exemplo de uma contração fraca em um subconjunto completo que não é uma contração.
Dica: Para o ítem (c), você pode considerar funções de uma variável real.

4. (a) Seja $M(n;\mathbb{R})$ o espaço vetorial de matrizes $n \times n$ com coeficientes reais e seja $\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R}) \subset M(n;\mathbb{R})$ o subespaço de matrizes simétricas. Mostre que a aplicação $F : M(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ dada por $F(A) = AA^T$, onde A^T é a transposta de A, é de classe C^∞.

   (b) Considere $\mathrm{SO}(n) = \{A \in M(x;\mathbb{R}) \mid AA^T = \mathrm{Id}\}$. Mostre que $\mathrm{SO}(n)$ é localmente dada pelo gráfico de uma função de classe C^∞.

   (c) Descreva o espaço tangente a $\mathrm{SO}(n)$ na identidade.

5. (a) Enuncie e prove o *Teorema do Valor Médio* para derivadas de funções de várias variáveis reais.

   (b) Seja A um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$, e seja $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Prove que se $df_x = 0$ para todo $x \in A$, então f é constante.