Exame de Análise

23 de agosto de 2018

1. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência uniformemente limitada de funções, que são integráveis em $[a,b]$. Definamos $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ por
$$F_n(x) := \int_a^x f_n(t)dt.$$
Prove que existe uma subsequência $(F_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge uniformemente em $[a,b]$.

2. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < x^2\}$.

   a. Mostre que toda reta contendo $(0,0)$ contém um intervalo ao redor de $(0,0)$ que está contido em $\mathbb{R}^2/A$.

   b. Definamos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 0$ se $x \notin A$ e $f(x) = 1$ se $x \in A$. Para cada $h \in \mathbb{R}^2$ definamos $g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g_h(t) := f(th)$. Mostre que cada g_h é contínua em 0, mas f não é continua em $(0,0)$.

3. Coloque verdadeiro (V) ou falso (F) em cada afirmação. Justifique sua resposta.

   a. Se um conjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}^n$ tem fronteira vazia, então $X = \mathbb{R}^n$.

   b. Se A e B são abertos em $\mathbb{R}^n$, vale que se $A \cap B$ é compacto, então $A \cap B = \phi$.

   c. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} (1 - cos\frac{x^2}{y})\sqrt{x^2+y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$
   Então f tem todas as derivadas direcionais, mas não é diferenciável.

4. Seja $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ dada por $g(u,v,w,x,y) = uy + vx + w + x^6$.

   a. Prove que em uma vizinhança de $(2,1,0,-1,0)$, a equação $g(u,v,w,x,y) = 0$ define x como uma função de classe C^∞ das variáveis u,v,w e y, $x = \xi(u,v,w,y)$, e determine $\operatorname{grad}\xi(2,1,0,0)$.

   b. Verifique se $g^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície de classe C^∞ em $\mathbb{R}^5$.

5. Mostre que a aplicação $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ dada por $f(X) = X^2$ é um difeomorfismo de uma vizinhança da identidade sobre outra vizinhança da identidade, mas não é um difeomorfismo local.