

1. Enuncie e mostre um dos seguintes teoremas:

- Teorema de Àrzela-Áscoli.
- Teorema de Borel-Lebesgue.
- Teorema da Função Implícita.

2. Seja o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Mostrar que existe uma cobertura infinita por retângulos abertos do conjunto $B = A - \{(1, 1)\}$ que não tem uma sub-cobertura finita.

3. Mostrar que para cada $\varepsilon > 0$ o sistema

$$\begin{cases} 2x^2 + 6 \operatorname{sen}(z) = y \\ e^{yz} - x = 0 \end{cases}$$

tem infinitas soluções no conjunto $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 \leq \varepsilon\}$.

4. Seja a sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}.$$

- Mostrar que a sequência converge uniformemente em \mathbb{R} e determinar a função limite.
- Mostrar que a sequência $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge para a função f' .

“I can promise you two things:
One, I’ll always look this good,
and two I’ll never give up on you.”

- *Hellboy*.