Universidade Federal Fluminense
Pós-Graduação em Matemática
Exame de Qualificação de Análise (Mestrado)
26/08/2016

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que f não é injetiva.

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $k > 0$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:
a) f é homogênea de grau k, isto é, $f(tx) = t^k f(x)$ para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$.
b) f satisfaz a fórmula de Euler: $\langle \nabla f(x), x \rangle = k \cdot f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Considere a elipse
$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
onde $a, b > 0$ e o ponto $p(t) = (at, bt)$ onde $t \in (0, \infty)$. Seja $q(t) \in E$ o ponto que realiza a distância entre $p(t)$ e E. Calcule
$$\lim_{t \to \infty} q(t).$$

4. a) Seja U um aberto convexo limitado em $\mathbb{R}^n$. Suponha que $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável e que existe uma constante $M \in \mathbb{R}$ tal que
$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq M$$
para todo $x \in U$ e $i = 1, 2, ..., n$. Mostre que $f(U)$ é limitado.
b) Apresente um contra-exemplo quando retirada a hipótese da convexidade de U.

5. a) Enuncie o Teorema da Aplicação Inversa.
b) Use o Teorema da Aplicação Inversa para demonstrar o Teorema das Funções Implícitas enunciado a seguir:
Seja $f = (f_1, f_2, ..., f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$. Suponha que, no ponto $p = (a, b)$, com $f(p) = c$, a matriz $n \times n$
$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p) \right] \quad (i, j = 1, 2, ..., n)$$
seja invertível. Então existem $Z \subseteq U$ (aberto contendo p), $V \subseteq \mathbb{R}^m$ (aberto contendo a) e $g : V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k (com $g(a) = b$) satisfazendo
$$\left. \begin{array}{c} (x, y) \in Z \\ f(x, y) = c \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in V \\ y = g(x) \end{array} \right.$$

Boa Prova!