UFF – Mestrado em Matemática

Exame de Qualificação em Análise I
Segunda-feira, 21 de março de 2016

1ª Questão: Seja $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua.

1. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
   (a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$;
   (b) $f^{-1}(K)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto.
2. Mostre que se f satisfaz uma das duas condições acima, então f envia conjuntos fechados em conjuntos fechados. Dê um exemplo de uma aplicação contínua que não satisfaz as condições equivalentes (a) e (b).

2ª Questão:
1. Enuncie e prove o Teorema de Schwarz para funções reais de n variáveis.
2. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ e $a \in U$ um ponto crítico de f. Mostre que se a forma quadrática hessiana de f em a é positiva, então a é um ponto de mínimo local não–degenerado.

3ª Questão: Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções reais contínuas em $\mathbb{R}$ que converge uniformemente para $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $(x_n)_n$ é uma sequência de números reais tal que $\lim x_n = x$, prove que $\lim f_n(x_n) = f(x)$. Dê um exemplo em que o resultado não é válido se a convergência de $(f_n)_n$ for pontual.

4ª Questão: Seja $G \subset \mathbb{R}^{n^2}$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ invertíveis. Defina $f : G \longrightarrow G$ onde $f(X) = X^{-1}$ para toda $X \in G$. Prove que G é aberto e que f é diferenciável com $f'(X)V = -X^{-1}VX^{-1}$ para quaisquer $X, V \in G$.

5ª Questão:
1. Mostre que toda aplicação bilinear $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável e determine $f'(x, y) \cdot (u, v)$ para $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ pontos quaisquer.
2. Seja $M(n \times n)$ o conjunto de matrizes $n \times n$. Mostre que existem abertos $U, V \subset M(n \times n)$ contendo a matriz identidade tal que para toda matriz $Y \in V$ existe uma única matriz $X \in U$ tal que $X^2 = Y$.

6ª Questão: Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$, $c = (a, b) \in U$ e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos que $\partial f / \partial x$ existe numa vizinhança de c, sendo contínua em c, e que $\partial f / \partial y$ existe apenas no ponto c. Prove que f é diferenciável no ponto c.