UFF – Mestrado em Matemática

Exame de Qualificação em Análise I
Sexta-feira, 21 de agosto de 2015

Escolha e solucione 4 das 5 questões abaixo:

1ª Questão: Sejam F e G subconjuntos fechados disjuntos e não-vazios de $\mathbb{R}^n$. Prove que a função de Urysohn $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, é uniformemente contínua se, e somente se, $d(F,G) > 0$.

2ª Questão: Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que as derivadas parciais de segunda ordem de f existem em $(0,0)$ mas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Isso contradiz o Teorema de Schwarz? Por quê?

3ª Questão: Prove a Desigualdade do Valor Médio: Dado $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável em cada ponto do segmento de reta aberto $(a, a+v)$ e tal que sua restrição ao segmento fechado $[a, a+v] \subset U$ seja contínua. Se $|f'(x)| \leq M$, para todo $x \in (a, a+v)$, então $|f(a+v) - f(a)| \leq M \cdot v$. Dê um exemplo em que não vale a igualdade.

4ª Questão: Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 em U. Fixe $x_0 \in U$ e $\epsilon > 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que, para $|x_k - x_0| \leq \delta$, $k = 1, 2$, temos $x_k \in U$ e

$$|f(x_1) - f(x_2) - f'(x_0)(x_1 - x_2)| \leq \epsilon \, |x_1 - x_2|.$$

5ª Questão: Sejam os vetores linearmente independentes $v_1, v_2 \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Considere a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(w) = \det(v_1, v_2 \ldots, v_{n-1}, w)$. Mostre que o máximo de $f|_{S^{n-1}}$ é atingido em um vetor a que é ortogonal a cada um dos vetores $v_1, v_2 \ldots, v_{n-1}$.