Nome: ____

Exame de Qualificação em Análise (27/03/2015)

Das 4 questões a seguir, apenas as 3 melhores serão consideradas.

1) Use a desigualdade do Valor Médio para demonstrar que a aplicação

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$$

é uma aplicação de Lipschitz.

2) Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo linear, e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 tal que $\|g(x)\| \leq M \|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (onde M é uma constante positiva). Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = T(x) + g(x)$. Mostre que existem abertos U e V em $\mathbb{R}^n$, com $0 \in U \cap V$ tais que $f : U \to V$ é um difeomorfismo de classe C^1.

3) Mostre que a seguinte aplicação é diferenciável e calcule a sua derivada

$$\begin{array}{rlcl} f: & M(n,n) \times M(n,n) & \to & M(n,n) \\ & (X,Y) & \longmapsto & X \cdot Y + X^2 \end{array}$$

onde $M(n,n) \sim \mathbb{R}^{n^2}$ é o grupo das matrizes $n \times n$ com entradas reais.

4) Enuncie os teoremas da "Forma Local das Imersões" e da "Forma Local das Submersões". Demonstre um deles.

Boa sorte!