Exame de qualificação de mestrado em análise 19/03/2010

Resolver 4 dos 5 problemas

(1) Use a desigualdade do valor médio para provar que

(i) a aplicação $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ é uma aplicação de Lipchitz

(ii) $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação de classe C^1 é de Lipchitz sobre um compacto $K \subset \mathbb{R}^m$.

(2) (i) seja $f : GL_m(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_m(\mathbb{R})$ dado por $f(X) = X^{-1}$

Calcule $f'(X)(Y)$

(ii) Seja $g : M_m(\mathbb{R}) \times M_m(\mathbb{R}) \longrightarrow M_m(\mathbb{R})$ dado por $g(A,B) = AB$

Calcule $(g'(A,B))(C,D)$

(3) (i) enuncie os teoremas da função implícita.

(ii) Considere $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x,y,z) = (x-1)^2 e^{xy} - \cos(x+z)e^{y}$

Use o teorema da função implícita para mostrar que dado $\epsilon > 0$, a equação $F(x,y,z) = 0$ tem infinidade de soluções na bola $x^2+y^2+z^2 \leq \epsilon$

(4) seja $g : M_m(\mathbb{R}) \longrightarrow M_m(\mathbb{R})$ definida por $f(A) = A^K$, $K \in \mathbb{Z}^+$

(i) calcule $f'(A)(B)$

(ii) Usando teorema da função inversa prove que toda matriz B numa vizinhança da matriz identidade possui uma raiz K-ésima isto é $\exists\, A \in B \div A^K = B$

(5) Enuncie os teoremas conhecidos como forma local das imersões e forma local das submersões, demonstre um deles