# Análise no $\mathbb{R}^n$

2006

**Questão 1** Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função

$$g(x,y) = f\left(e^{xy} + x, e^{x^2 f(x,y^2)} + xy + y\right),$$

e conclua que $(0,0)$ é um ponto crítico de $g$ se, e só se, $(1,1)$ é um ponto crítico de $f$.

---

**Questão 2** Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto. Mostre que:

**(a)** se $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação localmente Lipschitziana, então $f$ é Lipschitziana.

**(b)** se $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe $C^1$, então existe $M > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ para todos $x, y \in K$.

**Questão 3** Sejam $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo linear, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $C^1$ tal que $\|g(x)\| \leq M\|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $M$ é uma constante positiva, e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação dada por $f(x) = T(x) + g(x)$. Mostre que existem abertos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ em $\mathbb{R}^n$, com $0 \in \mathcal{U}$ e $0 \in \mathcal{V}$ tais que $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ é um difeomorfismo de classe $C^1$.

**Questão 4** Seja $\mathcal{U} = \{X \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det X \neq 0\}$. Considere a aplicação $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ dada por $f(X,Y) = XY$.

**(a)** Calcule $\partial_1 f(X,Y) : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ e $\partial_2 f(X,Y) : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, onde $\partial_1 f(X,Y)(V) = f'(X,Y)(V,0)$ e $\partial_2 f(X,Y)(V) = f'(X,Y)(0,V)$ para todo $V \in \mathbb{R}^{n^2}$.

**(b)** Use o item **(a)** e o Teorema da Aplicação Implícita para provar que a aplicação dada por $\varphi(X) = X^{-1}$ é um difeomorfismo de classe $C^\infty$ e $\varphi'(X)\,V = -X^{-1}VX^{-1}$ para todo $X \in \mathcal{U}$ e todo $V \in \mathbb{R}^{n^2}$.

---