ANÁLISE 2005.1

II. Faça três dentre as questões 1, 2, 3 e 4 abaixo:

1. **(a)** Enuncie o Teorema da Função Implícita para aplicações de classe C^k.

   (b) Use esse teorema para mostrar que dado $\epsilon > 0$, a equação

$$(x-1)^2 e^{xy} - \cos(x+z)e^{yz} = 0$$

   tem uma infinidade de soluções (x_0, y_0, z_0) na bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq \epsilon$.

2. Seja $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ tal que as derivadas parciais $D_i f$ existem em $\mathbf{R}^m$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (i) f é uma função de Lipschitz;

   (ii) Existe $C \in \mathbf{R}$ tal que $|D_i f(x)| \leq C$ para todo $x \in \mathbf{R}^m$ e todo $1 \leq i \leq m$.

   (Sugestão para (ii) $\Rightarrow$ (i): Dados $x = (x_1, \ldots, x_m)$ e $y = (y_1, \ldots, y_m)$, escreva

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^{m} [f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)})],$$

   onde $z^{(0)} = x$, $z^{(i)} = (y_1, \ldots, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ para $1 \leq i \leq m-1$ e $z^{(m)} = y$.)

3. Seja K um subconjunto compacto de $\mathbf{R}^m$. Seja $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ uma seqüência de funções contínuas de K em $\mathbf{R}$ que converge uniformemente para uma função $f : K \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in K$. Prove que:

   (a) Existem $\alpha > 0$ e $n_0 \in \mathbf{N}$ tais que $|f_n(x)| \geq \alpha$ para todo $x \in K$ e todo $n \geq n_0$.

   (b) $\left(\dfrac{1}{f_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge uniformemente para $\dfrac{1}{f}$ em K.

4. Seja $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ uma seqüência de aplicações de classe C^1 de $\mathbf{R}^m$ em $\mathbf{R}^m$. Suponha que:

   (i) $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

   (ii) $(Df_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente para uma aplicação $G : \mathbf{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$.

   Mostre que existe uma aplicação $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ de classe C^1 tal que $f_n \to f$ uniformemente em compactos. Supondo também que

$$Df_n(0) = \frac{n}{1+2n} Id \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N},$$

   mostre que f é um C^1-difeomorfismo entre vizinhanças da origem.