UFF - IME - GPM - Exame de Álgebra Linear

27 de agosto de 2021

1. Seja $\mathbb{X} = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, o espaço das matrizes reais $n \times n$. Definimos a aplicação $\alpha : \mathbb{X} \longrightarrow L(\mathbb{X}, \mathbb{X})$[1] onde, para toda $M \in X$,

$$\alpha(M) : P \longmapsto MP - PM, \qquad P \in \mathbb{X}.$$

   a) Mostre que α é linear;
   b) Descreva $\mathrm{Ker}(\alpha)$ explicitamente;
   c) Supondo que $M \in \mathbb{X}$ tenha autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, provar que $\alpha(M)$ tem autovalores $\lambda_i - \lambda_j$, para todo $1 \leq i < j \leq n$;

2. Seja V o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 2 e coeficientes reais. Definam-se as funções

$$\alpha_1\big(p(x)\big) = \int_0^1 p(x)dx, \qquad \alpha_2\big(p(x)\big) = \frac{dp}{dx}(1), \qquad \alpha_3\big(p(x)\big) = p(0)$$

   para $p(x) \in V$.

   a) Provar que $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$ é uma base do espaço dual V^*.
   b) Determinar a base bi-dual do espaço V^{**}, isto é, a base dual de $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$.

3. Ache a forma de Jordan da seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Coloque verdadeiro (V) ou falso (F) em cada afirmação, e justifique sua resposta.

   a) Se E é um projeção, então $E = E^2$.
   b) Se A, B são operadores em espaços de dimensão finita, AB e BA têm os mesmos autovalores.
   c) Se A é nilpotente, todos os seus autovalores são nulos.
   d) Se A é um operador invertível e λ é um autovalor de A, $1/\lambda$ é autovalor de A^{-1}.

5. Seja $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3 com coeficientes reais e consideremos o espaço $(\mathbb{R}^4, <,>)$ onde $<,>$ é o produto interno usual.

   a) Se $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ é a transformação linear definida por

$$T(a, b, c, d) = a - bx + cx^2 - dx^3\,;$$

   definir um produto interno em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que T seja unitaria.

   b) Encontre uma base ortonormal de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ em relação ao produto interno definido na parte anterior.

[1] $L(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ é o espaço das transformações lineares de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{X}$.