PGMAT — UFF
Exame de Qualificação do Mestrado em Álgebra Linear
19/03/2019

Questões

1. Considere uma aplicação linear $T : V \to V$ tal que

$$T^2 - T + \mathrm{Id}_V = \mathbf{0},$$

onde $\mathbf{0}$ denota o operador nulo $\mathbf{0} : V \to V$, tal que a imagem de todo $v \in V$ é o vetor nulo $0_V \in V$. Mostre que T é invertível e que

$$T^{-1} = \mathrm{Id}_V - T.$$

2. Seja P uma matriz real 3×3 tal que

$$PP^t = \mathrm{Id}_{3\times 3} \quad \text{e} \quad \det P = 1.$$

Mostre que P tem um autovalor igual a 1. O que pode-se afirmar sobre os outros autovalores?

3. (a) Dizemos que um subconjunto K de um espaço vetorial V é *convexo* se $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$ para quaisquer $x, y \in K$ e todo $\lambda \in (0,1)$. A *envoltória convexa* de um subconjunto qualquer $X \subseteq V$ é o conjunto

$$\mathrm{conv}(X) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j x_j : n \in \mathbb{N},\ x_j \in X \text{ e } t_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n), \text{ e } \sum_{j=1}^{n} t_j = 1 \right\}.$$

Mostre que $\mathrm{conv}(X)$ é convexo para qualquer subconjunto $X \subseteq V$. Prove que X é convexo se, e somente se, $X = \mathrm{conv}(X)$.

(b) Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de produto interno, e denote por $|| \cdot || := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ a norma induzida pelo produto interno. Sejam, também, $K \subseteq V$ um subconjunto não-vazio convexo e fechado, e $a \in V \setminus K$. Mostre que existe um único $x_0 \in K$ tal que

$$||a - x_0|| \leq ||a - x||$$

para todo $x \in K$.

4. Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de produto interno, e seja $T \colon V \to V$ uma transformação linear. Mostre que $\dim(\mathrm{im}(T)) = 1$ se, e somente se, existem vetores $u, w \in V$ tais que $Tv = \langle u, v \rangle w$ para todo $v \in V$.

5. Seja A uma matriz real $n \times n$ simétrica e positiva-definida, isto é, para todo $v \in \mathbb{R}^n$ diferente de zero, temos que $v^t A v > 0$.

(a) Mostre que existe uma única matriz real simétrica e positiva-definida B tal que $B^2 = A$.

(b) Mostre que dada uma matriz real $n \times n$ invertível G, existem uma única matriz P real ortogonal e uma única matriz real simétrica definida positiva B tais que $G = PB$.
Dica: Considere a matriz $A = G^t G$ e usar o item (a).