Exame de Qualificação em Álgebra Linear

16 de agosto de 2018

---

1. Ache a forma canônica da seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Coloque verdadeiro (V) ou falso (F) em cada afirmação, e justifique sua resposta.

   a. Se $T^*T = 0$ então $T = 0$ (i.e., $T(x) = 0$, para todo $x \in V$).

   b. Se T é um projeção, os seus autovalores sempre são 0 ou 1.

   c. Se T é uma involução, isto é, se $T^2 = I$, os autovalores são sempre positivos.

   d. Se T é diagonalizável e invertível, então T^{-1} é diagonalizável.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2 - 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha \end{bmatrix}$$

   e $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por

$$\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \ A \ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{1}$$

   a. Determine o polinômio característico e os valores próprios de A, em função de α.

   b. Para $\alpha = 2$, encontre bases para os espaços próprios de A e verifique se A é diagonalizável (para $\alpha = 2$).

   c. Determine os valores de α para os quais $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

4. Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear, simétrica e não-degenerada. Prove que para todo funcional linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existe um único vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(w) = \varphi(w, v), \quad \forall w \in \mathbb{R}^n.$$

5. Seja E o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 2)$, e F o subespaço gerado por $(0, 1, -1)$ e $(1, 1, 2)$.

   a. Determine a dimensão de $E + F$.

   b. Determine a dimensão de $E \cap F$.