PGMAT — UFF
Exame de Qualificação do Mestrado em Álgebra Linear
27/03/2018

Questões

1. Seja V_2 o espaço vetorial de polinômios com coeficientes reais de grau no máximo 2 com o produto interno
$$< f(t), g(t) >= \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$
Seja $W = [5, 1+t]$ o subespaço gerado por 5 e $1+t$.
   (a) Encontre uma base ortonormal de W.
   (b) Determine o complemento ortogonal $W^\perp$ em V_2.

2. Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear auto–adjunto. Dizemos que T é **positivo definido** se todos os seus autovalores são positivos. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, justifique rigorosamente suas resposta.
   (a) Se T é positivo definido, então T é invertível.
   (b) T é positivo definido se, e somente se, $< T(v), v >$ é positivo para todo $v \neq 0$.
   (c) A reflexão $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ em torno de uma reta passando pela origem é um operador positivo definido.
   (d) Se T é positivo definido, então seu inverso (caso exista) também é.

3. Seja A uma matriz 2×2 com coeficientes reais. Suponha que o polinômio característico de A possui duas raízes complexas $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$, com $b \neq 0$. Mostre que A é semelhante a matriz abaixo
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

4. Seja V um espaço vetorial real de dimensão $n \geq 1$, com produto interno $< , >$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear auto-adjunto. Seja A a matriz de T numa base ortonormal de V e considere a transformação linear complexa $T_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definida em $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ por
$$T_A(x) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$
Em $\mathbb{C}^n$ consideramos o produto interno hermitiano usual
$$< x, y >_{\mathbb{C}} = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}.$$
   (a) Mostre que $< T_A(x), y >_{\mathbb{C}} = < x, T_A(y) >_{\mathbb{C}}$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{C}^n$.
   (b) Mostre que os autovalores de T_A são necessariamente reais.
   (c) Mostre que os autovalores de T_A e T são os mesmos.
   (d) Utilize os resultados anteriores para concluir que um operador linear real auto-adjunto tem autovalores reais.