UFF – Mestrado em Matemática

Exame de Qualificação em Álgebra Linear
Sexta-feira, 11 de agosto de 2017

1ª Questão: Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F, T um operador linear em V, $c_1, \ldots, c_k$ os autovalores distintos de T, $W_i = \text{Nuc}(T - c_i I)$ para $i = 1, \ldots, k$. Mostre que as afirmações abaixo são todas equivalentes:

(i) T é diagonalizável;

(ii) o polinômio característico de T é $f(X) = (X - c_1)^{d_1} \ldots (X - c_k)^{d_k}$ e $\dim(W_i) = d_i$ para $i = 1, \ldots, k$;

(iii) $\dim(W_1) + \ldots + \dim(W_k) = \dim V$.

2ª Questão: a. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F, e W um subespaço de V. Se f é um funcional linear em W ($f \in W^*$), mostre que existe g funcional linear em V ($g \in V^*$) tal que $g(\alpha) = f(\alpha)$ para todo $\alpha \in W$.

b. Sejam V um espaço com produto interno de dimensão finita, e f um funcional linear em V ($f \in V^*$). Mostre que existe um único vetor $x \in V$ tal que $f(\alpha) = (\alpha | x)$ para todo $\alpha \in V$.

3ª Questão: a. Seja V um espaço vetorial de dimensão 11. Determine a forma canônica de Jordan de um operador nilpotente N de índice 4 tal que $\dim(N(V)) = 6$, $\dim(N^2(V)) = 3$ e $\dim(N^3(V)) = 1$.

b. Determine todas as possíveis formas racionais de matrizes quadradas sobre $\mathbb{C}$ cujos polinômios característico e mínimo sejam respectivamente: $f(X) = (X^2 + 1)^3 (X - 2)^4$, $p(X) = (X^2 + 1)^2 (X - 2)^2$.

4ª Questão: Sejam V um espaço vetorial complexo com produto interno de dimensão finita, e T um operador linear em V. Considere as afirmações abaixo:

(i) T é normal;

(ii) $||T(\alpha)|| = ||T^*(\alpha)||$ para todo $\alpha \in V$;

(iii) se $\alpha \in V$ é autovetor de T associado ao autovalor $c \in \mathbb{C}$, então α é autovetor de T^* associado ao autovalor $\overline{c}$;

(iv) $T = T_1 + iT_2$, com T_1 e T_2 operadores auto-adjuntos, e $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

Mostre que 3 dentre elas são equivalentes, incluindo obrigatoriamente a afirmação (i).