Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal Fluminense

| | | |
|---|---|---|
| GPM - Álgebra Linear | Exame | 2016/2 |

**ATENÇÃO**: Justifique todas as suas afirmações e enuncie as propriedades e teoremas usados.

**1ª Questão** [1,5 pts] . Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e seja $T \in L(V)$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $Ker(T^2) = Ker(T)$;

(ii) $Im(T^2) = Im(T)$;

(iii) $Ker(T) \oplus Im(T) = V$.

**2ª Questão** [2,0 pts] Seja T o operador linear sobre $\mathbb{R}^4$ que é representado pela matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

em relação a base canônica. Obtenha uma base na qual $T$ assume a forma $T = DU$, com $DU = UD$, $D$ diagonal e $U - I$ nilpotente. Exiba as matrizes de $D$ e $U$ em relação a base canônica.

(Dica: Use a decomposição de Jordan e defina $U = I + D^{-1}N$, onde $N$ é nilpotente.)

**3ª Questão** [2,0 pts] Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Prove as seguintes afirmações:

a) Com $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Seja $T \in L(V)$ um operador normal. T e unitário se, e somente se, todo autovalor de $T$ é um número complexo de módulo igual a 1.

b) Com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Seja $T \in L(V)$ um operador unitário. Seja $A = [T]_B$, onde $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de V então
$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \leq n.$$
(Dica: Note que $a_{ij} = \langle e_i, Te_j \rangle$. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz.)

**4ª Questão** [2,0 pts] Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Um operador linear $T \in L(V)$ é positivo se $T$ é autoadjunto e $\langle Tv, v \rangle > 0$ para todo $v \in V$. Mostre que:

a) Os autovalores de $T$ sao números reais positivos.

b) Se $T \in L(V)$ é um operador positivo e unitário, então $T = I$.

**5ª Questão** [2,5 pts] Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (7x, 3y + z, y + 3z)$. T é diagonalizável? Justifique. Caso afirmativo escreva a decomposição espectral de T e encontre uma matriz unitária $P$ e uma diagonal $D$ tais que $D = P^*AP$, onde $A = [T]$.