Universidade Federal Fluminense
Pós-Graduação em Matemática
Exame de Qualificação de Álgebra Linear
23/03/2016

1. ANULADA

2. Falso ou verdadeiro? Justifique **brevemente**.

   (a) [05] Se A é simétrica e $\det A > 0$, então A é positiva definida.

   (b) [05] Matrizes quadradas semelhantes sempre têm o mesmo polinômio mínimo.

   (c) [05] Considere o espaço $\mathbb{R}^n$ dotado de um produto interno real. Cada elemento de seu dual pode ser representado por um produto interno com um vetor fixo de $\mathbb{R}^n$.

3. Responda:

   (a) [15] Enuncie e demonstre o Teorema do Núcleo e da Imagem.

   (b) [10] Determine a dimensão do núcleo e da imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(e_1) = (1, -1, 0, 1)$, $T(e_2) = (-1, 2, 2, 1)$ e $T(e_3) = (-1, 2, 0, -1)$.

4. Sejam $\mathbb{V}$ espaço vetorial real com produto interno e $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ um operador linear. Dizemos que T é normal quando $TT^* = T^*T$. Prove que:

   (a) [05] Se T é normal, então $|Tv| = |T^*v|$ para todo $v \in \mathbb{V}$.

   (b) [10] Todo autovetor de T é autovetor de T^*. (Sugestão: Se T é normal, então $T - \alpha I$ também é)

   (c) [10] O complemento ortogonal do núcleo de T coincide com a imagem de T.

5. [15] Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a decomposição de Jordan de A, isto é, duas matrizes D e N com D diagonalizável e N nilpotente tais que $A = D+N$ e $ND = DN$.

Boa Prova!