UFF – Mestrado em Matemática

Exame de Qualificação em Álgebra Linear

Sexta-feira, 21 de agosto de 2015

1ª Questão: Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido, com respeito a uma base β de $\mathbb{R}^2$, pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a. Existe algum produto interno de $\mathbb{R}^2$ com respeito ao qual T é autoadjunto?

b. Existe algum produto interno de $\mathbb{R}^2$ com respeito ao qual T é unitário?

2ª Questão: Seja A uma matriz $n \times n$ com coeficientes em um corpo K. Suponha que A satisfaz: $A^3 = A$.

a. Usando a forma canônica de Jordan, prove que, se $K = \mathbb{C}$, então A é diagonalizável.

b. Se K é um corpo arbitrário, A é diagonalizável?

3ª Questão: Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial das matrizes 2×2 com entradas reais. Considere V^{sim} e V^{ant} os subespaços das matrizes simétricas e antissimétricas em V, respectivamente.

a. Determine uma base β de V tal que $\beta = \beta^{sim} \cup \beta^{ant}$, onde β^{sim} é uma base de V^{sim} e β^{ant} é uma base de V^{ant}.

b. Considere o $\mathbb{R}$-subespaco $W = \langle I \rangle$ de V, onde $I \in V$ é a matriz identidade. Determine as equações de W com respeito à base β.

c. Seja β^* a base dual de β. Para $v^* \in \beta^*$, escreva explicitamente $v^*\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.

4ª Questão: Enuncie e demonstre o Teorema do Núcleo e da Imagem para uma transformação linear definida em um espaço vetorial de dimensão finita.