Nome: ____

Exame de Qualificação em Álgebra Linear (27/03/2015)

Das 4 questões a seguir, apenas as 3 melhores serão consideradas.

1) Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuja matriz na base canônica tem todas as entradas iguais a 1.

a) Ache uma base de $\mathbb{R}^n$ na qual a matriz de T tenha $n^2 - 1$ zeros.

b) Mostre que $\mathbb{R}^n = N(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$.

[Obs.: $N(T) = Ker(T)$ é o *núcleo* de T; $\operatorname{Im}(T)$ é a *imagem* de T.]

2) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e sejam T e S dois operadores lineares sobre V.

a) Se $TS = ST$, mostre que a imagem por S de um subespaço invariante por T ainda é invariante por T.

b) Suponha que os autovetores de T geram o espaço V e que os subespaços invariantes por T são também invariantes por S. Mostre que $TS = ST$.

3) Uma matriz complexa 8×8 tem polinômio mínimo $x(x-2)^2(x+3)^2$ e polinômio característico $x^2(x-2)^2(x+3)^4$. Quais são as suas possíveis formas de Jordan? Em cada caso, qual é a forma canônica racional correspondente?

4) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno sobre $\mathbb{C}$.

a) Suponha que um operador linear $T : V \to V$ satisfaz

$$\langle Tv, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in V$$

Mostre que $T \equiv 0$.

b) Mostre que

$$T \text{ é normal} \iff \|Tv\| = \|T^* v\| \text{ para todo } v \in V$$

Boa sorte!