UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

NOME: ____

Exame de Mestrado – 2007.1

Álgebra Linear

Resolva três entre as quatro questões abaixo.

Questão 1. Diga se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa, justificando brevemente ou apresentando um contra-exemplo.

(a) Duas matrizes semelhantes têm o mesmo posto.

(b) Se $V = U \oplus W$ e E é um subespaço de V, então $E = (E \cap U) \oplus (E \cap W)$.

(c) Se T é um operador positivo e unitário, então $T = \mathrm{Id}$.

(d) Não existe uma matriz anti-simétrica real de posto ímpar.

Questão 2. Seja A uma matriz $n \times n$ *real* tal que $A^2 + I = 0$. Prove que n é par e que A é semelhante (sobre os números reais) a matriz em blocos $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{smallmatrix}\right)$, onde I é a matriz identidade de ordem $n/2$.

Questão 3. Determine todas as formas de Jordan possíveis para matrizes complexas 8×8 cujos polinômios mínimo e característico sejam $x(x-5)^2(x+2)^2$ e $x^2(x-5)^4(x+2)^2$, respectivamente. Em cada caso, determine a forma canônica racional correspondente.

Questão 4. Uma aplicação $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma dita uma *isometria* se $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Prove toda isometria que fixa a origem é necessariamente uma transformação linear. Conclua que toda isometria é um difeomorfismo de classe C^∞.