

## EXAME DE MESTRADO – 2005.1

### ÁLGEBRA LINEAR

I. Faça três dentre as questões A, B, C e D abaixo:

- A. Encontre todas as formas canônicas racionais possíveis para matrizes reais  $9 \times 9$  com polinômio mínimo  $m(t) = (t^2 - 4)^2(t + 2)^3$ .
- B. Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  de dimensão finita e seja  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Prove que  $T$  possui um vetor cíclico se e somente se os polinômios característico e mínimo de  $T$  coincidem.
- C. Seja  $V$  um espaço com produto interno sobre  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Suponha que  $T \in \mathcal{L}(V)$  satisfaz

$$\langle T(x), x \rangle = 0 \text{ para todo } x \in V.$$

Se  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ , prove que  $T = 0$ . O que ocorre se  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ?

- D. Seja  $V$  um espaço com produto interno sobre  $\mathbf{C}$  de dimensão finita e seja  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $T$  é normal;
- (ii)  $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$  para todo  $x \in V$ ;
- (iii)  $T = T_1 + iT_2$  com  $T_1$  e  $T_2$  auto-adjuntos e  $T_1T_2 = T_2T_1$ .