Nome: ____

Exame de Qualificação em Análise 2023.2

Questão	1	2	3	4	5	Total
Pontuação						
Máximo	20	20	20	20	20	100

1) Dizemos que uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é *própria* se para todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^m$, a pré-imagem $f^{-1}(K) \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacta. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua e própria.

a) Mostre que qualquer sequência $\{x_k\}$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $\{f(x_k)\}$ converge para $y \in \mathbb{R}^m$ admite uma subsequência convergente.

b) Mostre que f é fechada, isto é, para qualquer fechado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, a imagem $f(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ é fechada.

c) Sejam $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2.$$

Determine condições necessárias e suficientes para que f seja própria.

2) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \text{ se } (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

a) Determine, justificando, o maior conjunto em que f é contínua.

b) Determine, justificando, o maior conjunto em que f é diferenciável.

3) Seja $G \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ o conjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis. Sabe-se que a derivada de $f : G \to G$ dada por $f(X) = X^{-1}$, aplicada na matriz V, é $Df(X) \cdot V = -X^{-1}VX^{-1}$. Determine a derivada de $h : G \to G$ dada por $h(X) = X^{-2}$.

4) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função sobrejetiva de classe C^1.

a) Mostre que $n \geq m$.

b) Seja $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $posto(Df(p)) = m$. Mostre que existem vizinhanças abertas Z de p e W de $f(p)$ e uma função $g : W \to Z$ de classe C^1 com $g(f(p)) = p$ tal que $f \circ g = id$.

[Dica: se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é C^1 então L leva conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula.]

5) Seja $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo limitado, e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona. Mostre que f é integrável (a Riemann).

Boa prova!