Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal Fluminense

GPM - Análise	Exame de qualificação de mestrado	2022/1

ATENÇÃO: Justifique todas as suas afirmações e enuncie as propriedades e teoremas usados.

1ª Questão [2,5 pts]. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função uniformemente continua, e seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função continua que tende assintóticamente a f, ou seja $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) - g(x) = 0$. Provar que g é também uniformemente continua.

Solução: Seja $\epsilon > 0$. Queremos achar $\delta > 0$ tal que se $\|x - y\| < \delta$ então $\|g(x) - g(y)\| < \epsilon$. Como $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uniformemente continua, podemos pegar $\delta_1 > 0$ tal que se $\|x - y\| < \delta_1$ então $\|f(x) - f(y)\| < \frac{\epsilon}{3}$. Como $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) - g(x) = 0$, podemos pegar $R > 0$ tal que se $\|x\| > R$ então $\|f(x) - g(x)\| < \frac{\epsilon}{3}$. Segue por desigualdade triangular que se $x, y \in \mathbb{R}^n$ são tais que $\|x\| > R$, $\|y\| > R$ e $\|x - y\| < \delta_1$ então

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \|g(x) - f(x)\| + \|f(x) - f(y)\| + \|f(y) - g(y)\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Em outras palavras, para x, y grandes, o δ_1 satisfaz a propriedade desejada. Mas ainda temos que tomar conta do caso em que x, y sejam pequenos, e para isso usaremos outro argumento.

O conjunto $B = \{x : \|x\| \leq R + \delta_1\}$ é fechado e limitado, logo ele é compacto. Como $g : B \to \mathbb{R}^m$ é continua e B é compacto, segue que $g : B \to \mathbb{R}^m$ é uniformemente continua. Seja $\delta_2 > 0$ tal que se $x, y \in B$ são tais que $\|x - y\| < \delta_2$ então $\|g(x) - g(y)\| < \epsilon$. Esse δ_2 funciona agora para x, y pequenos, mas pode falhar para x, y grandes. Tomamos então $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e afirmamos que ele satisfaz o pedido.

Sejam então $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|x - y\| < \delta$. Se $\|x\| > R$ e $\|y\| > R$ então já vimos que $\|g(x) - g(y)\| < \epsilon$. Se $\|x\| \leq R + \delta_1$ e $\|y\| \leq R + \delta_1$ então $x, y \in B$ e vimos também que $\|g(x) - g(y)\| < \epsilon$. O caso $\|x\| \geq R$ e $\|y\| > R + \delta_1$ não pode acontecer pois ficaria $\delta > \|x - y\| \geq \|y\| - \|x\| > R + \delta_1 - R = \delta_1$. O caso $\|y\| \geq R$ e $\|x\| > R + \delta_1$ é análogo. $\square$

2ª Questão [2,5 pts]. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável.

a) Provar que $f^{-1}(b) \subset \mathbb{R}^m$ é fechado.

b) Mostrar que se $df(a)$ é injetora, então existe $c > 0$ tal que

$$\|df(a)u\| \geq c \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R}^m \text{ com } \|u\| = 1.$$

c) Provar que se a é um ponto de acumulação de $f^{-1}(\{b\})$, então $df(a)$ não é injetora.

Solução:

a) Como f é diferenciável, ela também é continua. Como $\{b\} \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, e f é continua, segue que a superfície de nível $f^{-1}(b) \subset \mathbb{R}^m$ também é fechado.

b) O conjunto $B = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\| = 1\}$ é fechado e limitado, e por tanto compacto. A função $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g(x) = \|df(a)x\|$ é continua por ser composição de continuas, e por tanto atinge seu mínimo no compacto B. Seja c esse mínimo. Como $df(a)$ é injetora, nenhum vetor de norma 1 pode ir ao 0, e por tanto $c > 0$.

c) Seja a um ponto de acumulação de $f^{-1}(b)$. Logo podemos pegar uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $f^{-1}(b)$ tal que $a_n \neq a$ para todo n e $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Como $f^{-1}(b)$ é fechado temos que $a \in f^{-1}(b)$. Por definição da diferencial deve valer

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - df(a)h\|}{\|h\|} = 0$$

Suponhamos que $df(a)$ é injetora. Logo podemos pegar $c > 0$ tal que $\|df(a)u\| \geq c$ para todo u de norma 1. Seja $u_n = \frac{a_n - a}{\|a_n - a\|}$ e $\lambda_n = \|a_n - a\|$. Logo temos

$$\frac{\|f(a_n) - f(a) - df(a)(a_n - a)\|}{\|a_n - a\|} = \frac{\|b - b - df(a)(\lambda_n u_n)\|}{\lambda_n} = \|df(a)u_n\| \geq c > 0$$

o que contradiz que o limite seja 0, e por tanto é um absurdo. O absurdo vem de supor que $df(a)$ é injetora. Concluimos que não é.

□

3ª Questão [2,5 pts]. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície, $p_0 \notin S$, e $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$.

a) Provar que p é ponto singular de $f : S \to \mathbb{R}$, $f(p) = \|p - p_0\|$ se e só se a reta por p_0 e p é perpendicular a T_pS.

b) Provar que p é ponto singular de $h : S \to \mathbb{R}$, $h(p) = \langle p, v\rangle$, se e só se v é perpendicular a T_pS.

Solução: Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização local de S, ou seja $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ é aberto, $\phi(U) = V \subset S$ é aberto, $\phi : U \to V$ é bijetiva, e $d\phi(x)$ é injetiva para todo $x \in U$. O espaço tangente a S num ponto $p = \phi(x)$ é então gerado pelas colunas da matriz $d\phi(x)$, que são os vetores

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = (\frac{\partial \phi_1}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial \phi_n}{\partial x_j})$$

A expressão local de f é $f\phi : U \to \mathbb{R}$, $f\phi(x) = \|\phi(x) - p_0\|$, e sua diferencial é $\nabla f\phi(x) = (\frac{\partial (f\phi)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial (f\phi)}{\partial x_{n-1}})$, onde

$$\frac{\partial (f\phi)}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{2\|\phi(x) - p_0\|} 2\langle \phi(x) - p_0, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\phi(x))\rangle.$$

Logo, $p = \phi(x)$ é ponto singular de f se e só se $\nabla f\phi(x) = 0$, e isso acontece se e só se $\phi(x) - p_0$ é perpendicular aos vetores $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)$, ou seja, ao espaço tangente $T_{\phi(x)}S$.

O segundo item é similar: usando a mesma parametrização local, temos agora que a expressão local de h é $h\phi : U \to \mathbb{R}$, $h\phi(x) = \langle \phi(x), v\rangle$, e sua diferencial é $\nabla h\phi(x) = (\frac{\partial (h\phi)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial (h\phi)}{\partial x_{n-1}})$, onde

$$\frac{\partial (h\phi)}{\partial x_j}(x) = \langle \frac{\partial \phi}{\partial x_j}, v\rangle.$$

Assim, $p = \phi(x)$ é ponto singular de h se e só se $\nabla h\phi(x) = 0$, e isso acontece se e só se v é perpendicular aos vetores $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)$, ou seja, ao espaço tangente $T_{\phi(x)}S$. □

4ª Questão [2,5 pts] Achar todos os pontos críticos da função $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ restringida à superfície $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 7\}$. Identificar quais desses pontos críticos são máximos e quais são mínimos.

Solução: Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = x + y + z - 7$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, se f admite um valor extremo quando sujeita à restrição $g(x, y, z) = 0$, então existe

$\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \lambda \nabla g$. Agora bem: $\nabla f(x, y, z) = (2x, 4y, 8z)$, e $\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Logo temos que resolver o sistema:

$$\begin{cases} (2x, 4y, 8z) = \lambda(1, 1, 1) \\ x + y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

Substituindo na segunda equação x, y, z em função de λ, obtemos $\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{8} = 7$ de onde $\lambda = 8$. Segue que $x = 4$, $y = 2$ e $z = 1$. Concluimos que o único ponto crítico de f restringida a S é $p = (4, 2, 1)$.

Observemos que $\lim_{(x,y,z)\to\infty} f(x, y, z) = +\infty$, logo como só há um valor extremo, $f(4, 2, 1)$ deve ser um mínimo. Conferimos isso do seguinte jeito: o plano S é paralelo aos vetores $(1, -1, 0)$ e $(1, 0, -1)$, logo podemos escrever qualquer ponto de S como $(x, y, z) = (4 + t + s, 2 - t, 1 - s)$, e temos

$$f(x, y, z) = f(4+t+s, 2-t, 1-s) = (16+t^2+s^2+8t+8s+2ts)+2(4+t^2-4t)+4(1+s^2-2s) =$$

$$= 28 + 2t^2 + 4s^2 + 2ts = 28 + t^2 + 3s^2 + (t + s)^2$$

que claramente tem o mínimo quando $t = s = 0$. $\square$