Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal Fluminense

GPM - Álgebra Linear	Exame de qualificação de mestrado	2022/1

ATENÇÃO: Justifique todas as suas afirmações e enuncie as propriedades e teoremas usados.

1ª Questão [2,5 pts] Dada $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, provar que existe $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ tal que $AB = I = BA$ se e só se $\det(A) = \pm 1$. Concluir que se $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, $\det(A) = \pm 1$ e $b \in \mathbb{Z}^n$ então o sistema $Ax = b$ tem solução em $\mathbb{Z}^n$.

Solução: Suponhamos primeiro que exista $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ tal que $AB = I$. Logo

$$1 = \det(I) = \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Como A e B têm coeficientes inteiros, seus determinantes também são números inteiros. Logo só pode acontecer $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.

Suponhanmos agora que $\det(A) = \pm 1$. Logo A é invertível. Vamos a provar que a inversa $B = A^{-1}$ tem que ter coeficientes inteiros. Segue da identidade $A.Adj(A) = \det(A).I$ que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A).$$

Cada entrada da matriz adjunta $Adj(A)$ é um determinante duma submatriz de A, e é por tanto um número inteiro. Concluimos então que A^{-1} tem todos os coeficientes inteiros. $\square$

2ª Questão [2,5 pts] Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Dadas $\phi, \phi_1, ..., \phi_k \in V^*$, provar que ϕ está no espaço gerado por $\phi_1, ..., \phi_k$ se, e somente se, o núcleo $\ker\phi$ de ϕ contém a interseção dos outros núcleos. Concluir que $\phi_1, ..., \phi_n$ são uma base de V^* se, e somente se,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker\phi_i = \{0\}.$$

Solução: Sejam $a_1, \dots, a_k \in K$ tais que $\phi = a_1\phi_1 + \dots a_k\phi_k$. Seja $v \in \cap_{i=1}^k \ker\, \phi_i$. Logo $\phi(v) = a_1\phi_1(v) + \cdots + a_k\phi_k(v) = 0$ e assim $v \in \ker\phi$. Isso prova que $\cap_{i=1}^k \ker\, \phi_i \subset \ker\phi$.

Provamos agora a outra implicação. Seja $T \subset V^*$ o subespaço gerado pelas formas $\phi_1, \dots, \phi_k$. Suponhamos que ϕ não está em T e provemos que $\cap_{i=1}^k \ker\, \phi_i \not\subset \ker\phi$. Seja $\psi_1, \dots, \psi_r$ uma base de T, logo o conjunto $\phi, \psi_1, \dots, \psi_r$ é linearmente independente e podemos estender ele a uma base de V^*:

$$\{\phi, \psi_1, \dots, \psi_r, \psi'_1, \dots, \psi'_s\}$$

Seja $\alpha : V^* \to K$ a funcional definida na base por $\alpha(\phi) = 1$, $\alpha(\psi_i) = 0$, $\alpha(\psi'_j) = 0$. Pelo isomorfismo canônico $V \to (V^*)^*$, a funcional $\alpha \in (V^*)^*$ é igual a avaliar num vetor $v \in V$. Temos que $\phi_i(v) = \alpha(\phi_i) = 0$ pois α se anula numa base de T, e assim $v \in \cap_{i=1}^k \ker\, \phi_i$. Mas $\phi(v) = \alpha(\phi) = 1$ e por tanto $v \notin \ker\phi$.

Finalmente, se $\phi_1, \dots, \phi_n$ são n funcionais tais que $\cap_{i=1}^n \ker\, \phi_i = \{0\}$ então elas formam um conjunto gerador de V^*, pois $\{0\} \subset \ker\phi$ para qualquer ϕ. Como $n = \dim V = \dim V^*$ segue que o conjunto $\phi_1, \dots, \phi_n$ é uma base. Recíprocamente, se $\phi_1, \dots, \phi_n$ são tais que $\cap_{i=1}^n \ker\, \phi_i \neq \{0\}$, então podemos pegar $v \neq 0$, $v \in \cap_{i=1}^n \ker \phi_i$, estender v a uma base $v, v_2, \dots, v_n$ de V, definir $\phi : V \to K$ na base por $\phi(v) = 1$ e $\phi(v_i) = 0$, e concluir que ϕ não está gerada pelas $\phi_1, \dots, \phi_n$ pois $v \notin \ker\phi$. $\square$

3ª Questão [2,5 pts] Seja V o subespaço de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$ gerado por $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin(x)$, $f_3(x) = e^x$, $f_4(x) = 1$ e $f_5(x) = \cos(x)$. Provar que $B = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ é uma base de V e achar a matriz do operador derivação $T : V \to V$, $T(f) = \frac{d}{dt} f$ na base B. Calcular os polinômios minimal e característicos de T, a sua decomposição primária e sua decomposição cíclica.

Solução: Temos que provar que as funções são linearmente independentes. Suponhamos que $a_1 x + a_2 \sin(x) + a_3 e^x + a_4.1 + a_5 \cos(x) = 0$, com $a_i \in \mathbb{R}$. Derivando duas vezes temos $a_2 \sin(x) + a_5 \cos(x) = a_3 e^x$, e como o lado esquerdo é uma função limitada, segue que $a_3 = 0$. Logo, avaliando a identidade $a_2 \sin(x) + a_5 \cos(x) = 0$ em 0 concluimos também que $a_5 = 0$, e consequêntemente $a_2 = 0$ também. Voltando à identidade original, fica $a_1 x + a_4.1 = 0$, de onde $a_1 = a_4 = 0$.

A matriz de T na base B é

$$T_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é $\chi_T = \det(X.I - T_B) = X^2(X-1)(X^2+1) = X^5 - X^4 + X^3 - X^2$. O minimal m_T deve dividir a χ_T e ter as mesmas raizes,então há duas opções: $m_T = \chi_T$ ou $m_T = X(X-1)(X^2+1)$. Para descartar a segunda opção, podemos observar que o minimal de f_1 é $m_{T,f_1} = X^2$ e por tanto X^2 divide a m_T. Concluimos então que $m_T = \chi_T$.

A decomposição primária de (V, T) é dada pelos subespaços $V_1 = \ker T^2 = \langle x, 1 \rangle$, $V_2 = \ker(T - I) = \langle e^x \rangle$ e $V_3 = \ker(T^2+1) = \langle \sin(x), \cos(x) \rangle$. Como o polinômio minimal coincide com o polinômio característico, segue que V é um espaço T-cíclico, e a sua decomposição cíclica é trivial, $V = S_1$. $\square$

4ª Questão [2,5 pts] Considere do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (5x, 2y + z, y + 2z)$

a) Verifique que T é auto-adjunto.

b) Escreva a resolução (ou decomposição) espectral do operador T explicitando as projeções envolvidas.

c) Se $A = [T]_E$ é a matriz de T na base canônica E, encontre uma matriz unitária P e uma diagonal D tais que $D = P^* A P$.

Solução:

a) Um operador T é autoadjunto se e só se sua matriz $[T]_B$ numa base ortonormal B é simétrica, pois $[T^t]_B = [T]_B^t$. A matriz de T na base canônica é

$$[T]_E = A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo fica claro que $[T_E]$ é simétrica e por tanto T é autoadjunto.

b) O polinômio característico de T é

$$\chi_T = \det(XI - A) = (X-5)[(X-2)^2 - 1] = (X-5)(X-1)(X-3)$$

e por tanto o espectro, ou seja o conjunto de valores próprios, de T é $\{1, 3, 5\}$. Para achar os espaços próprios V_{λ_i} e as projeções correspondentes E_{λ_i} podemos usar a fórmula $E_{\lambda_i} = e_{\lambda_i}(T)$ onde $e_{\lambda_i} = \prod_{\lambda_j \neq \lambda_i} \frac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}$. Logo temos

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{8}(X-3)(X-5) = \frac{1}{8}X^2 - X + \frac{15}{8} \\ e_3 &= -\frac{1}{4}(X-1)(X-5) = -\frac{1}{4}X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{5}{4} \\ e_5 &= \frac{1}{8}(X-1)(X-3) = \frac{1}{8}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Para avaliar os polinômios em T mais fácilmente usamos a expressão matricial. Assim, usando que $A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ temos

$$[E_1]_E = e_1(A) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{15}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[E_3]_E = e_3(A) = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{5}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[E_5]_E = e_5(A) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{3}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, a resolução (ou decomposição) espectral de T é $T = E_1 + 3E_3 + 5E_5$, onde E_1, E_3, E_5 são as projeções dadas pelas matrizes acima.

c) Se B é uma base ortonormal de vetores próprios, então $D = [T]_B = M(E, B)[T]_E M(B, E) = P^t AP$, onde $P = M(B, E)$ é a matriz de mudança de base de B à base canônica E, que será unitária pois suas colunas formam uma base ortonormal. Então, precisamos só achar uma base B ortonormal de vetores próprios. Olhando para as colunas das matrizes de E_1, E_2, E_3 percebemos que $v_1 = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $v_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $v_3 = (1, 0, 0)$ estão na imagem dos projetores e são por tanto vetores próprios de valor $1, 3, 5$ respectivamente. Normalizando esses vetores achamos a base B:

$$B = \left\{ w_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}),\ w_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ v_3 = (1, 0, 0) \right\}$$

Concluimos que $D = P^t AP$, onde $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $P = M(B, E) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$.

$\square$