UFF - IME - Departamento de Matemática e Estatística
Prova de álgebra

Nome: ____________________

Todas as respostas devem ser justificadas, resposta sem justificativa não sera valida. Tempo para resolução da prova: 2 horas.

Q	Valor	Nota
1	2,5	
2	2,5	
3	2,5	
4	2,5	
Total	10,0	

1. Seja G o grupo das matrizes com 3 linhas e 3 colunas triangulares superiores e invertíveis com coeficientes no corpo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   a) Compute a ordem de G.
   b) Lembramos que o centro de um grupo é o subgrupo dos elementos que comutam com todos os elementos do grupo. Prove ou dê um contra-exemplo para as segintes afirmações:
   (i) O centro de G é igual a G.
   (ii) O centro de G é igual ao subgrupo formado pela identidade do grupo.
2. Seja G um grupo de ordem p^2q^2, com p e q primos tais que $p < q$. Prove que se G não possui um q-Sylow normal, então G tem ordem 36.
3. Seja $f\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ a função que manda $p \in \mathbb{Z}[x]$ em
$$f(p) = \text{ classe de } p(2) \mod (7)$$
   a) Mostre que f é um homomorfismo de aneis.
   b) Mostre que $2x + 3$ e $x^2 + x + 1$ pertencem ao núcleo de f.
   c) Mostre que 7 e $x - 2$ pertencem ao ideal $(2x + 3, x^2 + x + 1)$ de $\mathbb{Z}[x]$.
   d) Mostre que o anel $\mathbb{Z}[x]/(2x + 3, x^2 + x + 1)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
4. Lembre que para um inteiro positivo a definimos
$$\mathbb{Z}[\sqrt{-a}] = \{b + c \cdot \sqrt{-a} : b, c \in \mathbb{Z}\}.$$
   a) Prove que $\mathbb{Z}[\sqrt{-a}]$ é um anel com unidade e um subanel do anel dos números complexos $\mathbb{C}$.
   b) Defina a função norma de um $\alpha = b + c \cdot \sqrt{-a}$ como
$$N(b + c \cdot \sqrt{-a}) := b^2 + a \cdot c^2$$
   Prove que a norma é multiplicativa, isto é, $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

c) Lembre que um elemento α de um anel R com unidade é um invertível se existe β em R tal que $\alpha\beta = 1$. Encontre todos os invertíveis dos aneis $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

d) Lembre que um elemento $\alpha \neq 0$ não invertivel de um anel R é irredutivel se toda vez que escrevemos $\alpha = \beta\gamma$, logo β ou γ é um invertivel. Dado um elemento $\alpha = b + c \cdot \sqrt{-1}$ do anel $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, prove que se $b^2 + c^2$ é um primo de $\mathbb{Z}$, então α é irredutível em $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.